Jörg MEYER, Hameln

Eigenschaften der rechtwinkligen Hyperbel

Es gibt zwei Standardformen der rechtwinkligen Hyperbel, nämlich

(a) $x \cdot y = a^2$ mit dem allgemeinen Punkt $P = \frac{a}{t} \cdot \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

(b) $x^2 - y^2 = b^2$ mit dem allgemeinen Punkt $Q = \frac{b}{\cos t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t \end{pmatrix}$.

Beide Formen gehen durch eine Drehstreckung auseinander hervor.

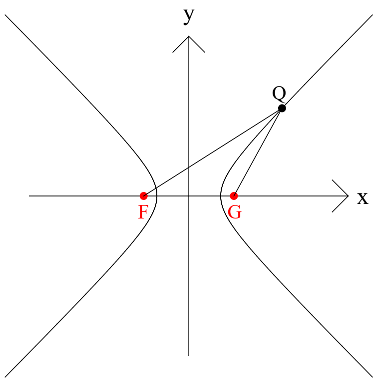
I. Die Brennpunkte der rechtwinkligen Hyperbel

Beginnen wir mit Form (b), bei der man sich auf den Fall $b = 1$ beschränken kann. Die Abstandsquadrate zwischen

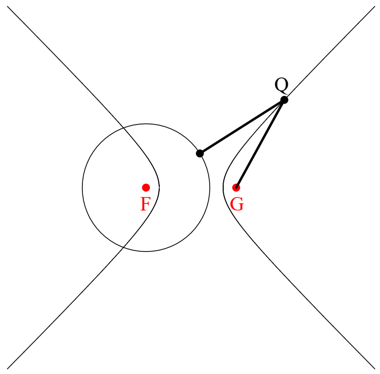
$Q = \frac{1}{\cos t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t \end{pmatrix}$ und $F = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $G = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ sind

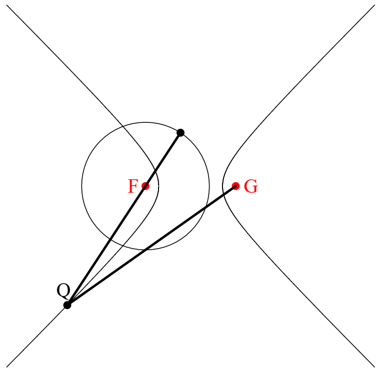
$QF^2 = \frac{2}{\cos^2 t} \cdot \left(1 + \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right)^2$ und $QG^2 = \frac{2}{\cos^2 t} \cdot \left(1 - \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right)^2$.

Die absolute Differenz $|QF - QG|$ der Abstände beträgt mithin 2.



Man hätte auch sagen können: Die Hyperbel besteht aus allen Punkten Q, die zu G und zum Kreis um F mit dem Radius 2 gleich weit entfernt sind. Das ist bemerkenswert für den Ast der Hyperbel, der F benachbart ist (unten rechts). Hier ist der Abstand von Q zum Kreis nicht der kleinste, sondern der größte.





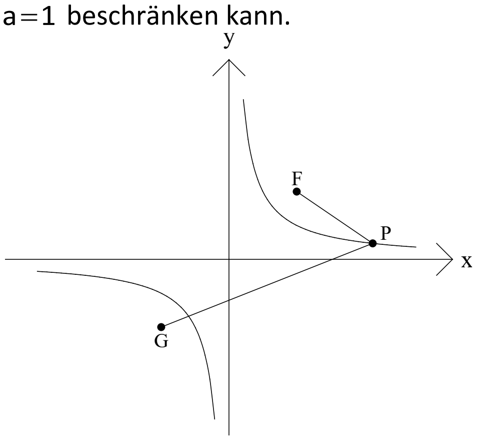
Nun zur vertrauteren Form (a), bei der man sich auf den Fall $a = 1$ beschränken kann.

Die Abstandsquadrate zwischen den Punkten $P = \frac{1}{t} \cdot \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \end{pmatrix}$

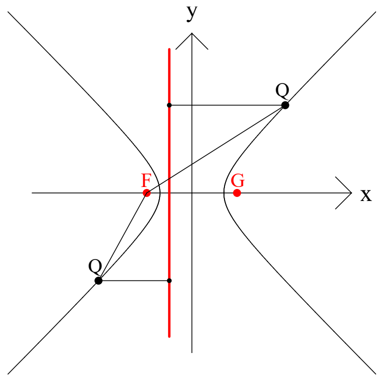
und $F = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ bzw. $G = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ haben die Größen

$PF^2 = \left(\left(t + \frac{1}{t}\right) - \sqrt{2}\right)^2$ und $PG^2 = \left(\left(t + \frac{1}{t}\right) + \sqrt{2}\right)^2$.

Die absolute Differenz $|PF - PG|$ der Abstände beträgt mithin $2 \cdot \sqrt{2}$.



II. Die Leitlinien der rechtwinkligen Hyperbel



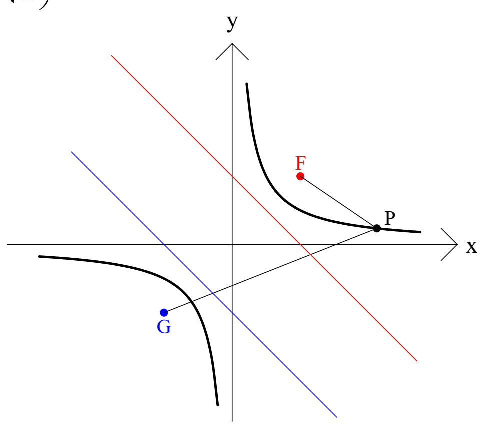
Beginnen wir wieder mit der Form (b). Alle Punkte $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, deren Abstand zu $F=\begin{pmatrix} -b\cdot\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ genau $\sqrt{2}$-mal so groß ist wie zur Geraden mit $x=-\frac{b}{\sqrt{2}}$, wird man auf die Gleichung $x^2-y^2=b^2$ geführt.
(Man bekommt dasselbe Resultat für G und die Gerade mit $x=\frac{b}{\sqrt{2}}$.)

Die Behandlung der Form (a) ist etwas aufwändiger, da man zur Leitliniendefinition den Abstand eines Punktes $Q=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ zur Geraden mit $y=m\cdot x+n$ benötigt. Der allgemeine Punkt der Geraden ist $P(t)=\begin{pmatrix} t \\ m\cdot t+n \end{pmatrix}$. Der gesuchte Abstand ist der Abstand von Q zum Lotfußpunkt L. Da QP(t) die Steigung $\frac{m\cdot t+n-v}{t-u}$ hat, ist genau dann L=P(t), wenn $\frac{m\cdot t+n-v}{t-u}\cdot m=-1$ ist, was auf $t=\frac{m\cdot v+u-m\cdot n}{m^2+1}$ führt, sodass sich der gesuchte Abstand d aus $d=\frac{|v-m\cdot u-n|}{\sqrt{m^2+1}}$ ergibt.

Sucht man nun alle Punkte $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, deren Abstand zu $F=\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ genau $\sqrt{2}$-mal so groß ist wie zur Geraden mit $y=-x+\sqrt{2}$, wird man auf die Gleichung

$$\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2=2\cdot\frac{\left(x+y-\sqrt{2}\right)^2}{2}$$ bzw. auf

$x\cdot y=1$ geführt. Man bekommt dasselbe Resultat für $G=\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ und die Gerade mit $y=-x-\sqrt{2}$ (blau).

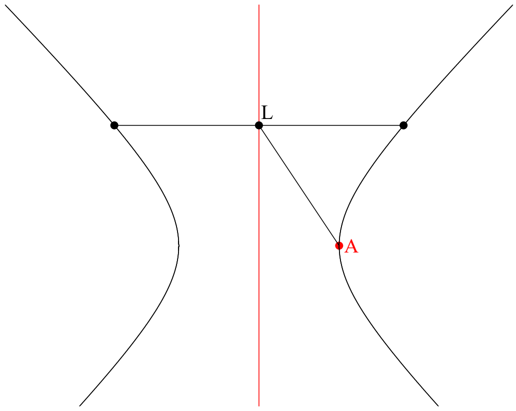


III. Die rechtwinklige Hyperbel als Strophoide

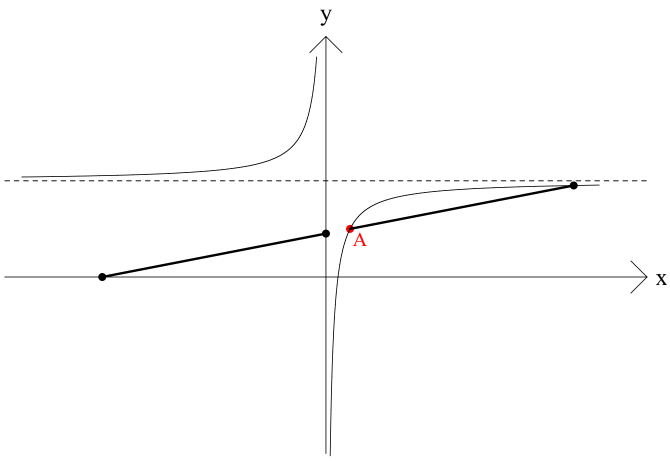
Der allgemeine Punkt der rechtwinkligen Hyperbel mit $x^2 - y^2 = b^2$ ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Schreibt man $x = \sqrt{b^2 + t^2}$, muss $y = t$ sein. Der Punkt $L = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$ wandere auf der y-Achse (rot).

Dann ist x der Abstand von L zum festen Punkt $A = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$. Damit ergibt sich die rechtwinklige Hyperbel als Ortskurve aller Punkte, deren horizontaler Abstand zu L so groß ist wie der Abstand von L zu A.



IV. Die rechtwinklige Hyperbel als Kissoide



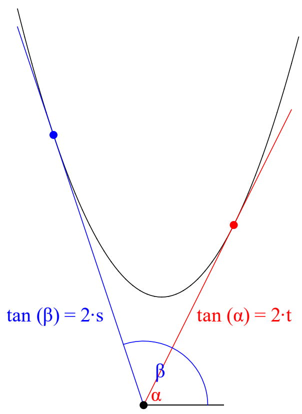
Es sei $A = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ein Punkt und $y = m \cdot (x - u) + v$ die Gleichung einer Geraden durch A. Diese schneidet die x-Achse in $X = \begin{pmatrix} u - v/m \\ 0 \end{pmatrix}$ und die y-Achse in $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ v - m \cdot u \end{pmatrix}$. Trägt man den Vektor $\overrightarrow{XY}$ an A ab, bekommt man $A + Y - X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v/m \\ -m \cdot u \end{pmatrix}$, also eine verschobene rechtwinklige Hyperbel als Ortskurve, wenn m variiert wird.

V. Die rechtwinklige Hyperbel als Isoptik der Normalparabel

Wenn sich zwei Tangenten der Normalparabel mit $y = x^2$ rechtwinklig schneiden, liegt der Schnittpunkt bekanntlich auf der Geraden mit $y = \frac{-1}{4}$. Auf welcher Kurve liegen die Schnittpunkte zweier Tangenten, die einen Winkel von 45° bilden? (Eine solche Kurve heißt Isoptik.)

Zu $\begin{pmatrix} s \\ s^2 \end{pmatrix}$ gehört die Tangentensteigung $2 \cdot s$, zu $\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ gehört die Tangentensteigung $2 \cdot t$. Beide Tangenten schneiden einander in $S = \begin{pmatrix} (s+t)/2 \\ s \cdot t \end{pmatrix}$.

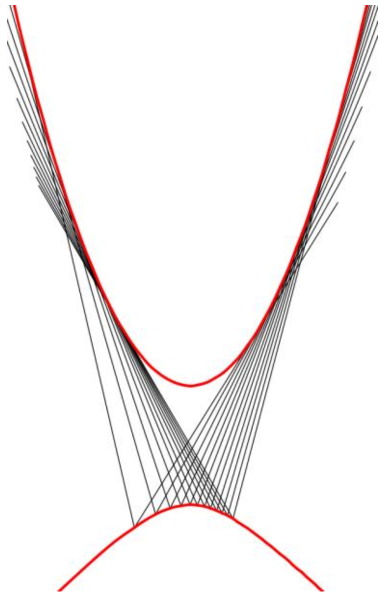
Rechts soll $45° = \beta - \alpha$ bzw. $1 = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta} = \frac{2 \cdot s - 2 \cdot t}{1 + 4 \cdot s \cdot t}$ sein, also $s \cdot t = \frac{s-t}{2} - \frac{1}{4}$ woraus $s = \frac{1 + 2 \cdot t}{2 \cdot (1 - 2 \cdot t)}$ folgt.



Für $t=\frac{1}{2}$ ist $\alpha=45°$ und daher $\beta=90°$.

Für $t>\frac{1}{2}$ ist $s<0<t$.

Nebenstehend ist oben die rote Parabel und unten die rote Kurve der Schnittpunkte für $t>\frac{1}{2}$ zu sehen.



Für den Schnittpunkt S gilt $2\cdot S=\begin{pmatrix} t+s \\ 2\cdot s\cdot t \end{pmatrix}$. Mit

$r=\frac{2\cdot t-1}{\sqrt{2}}$ ist $t=\frac{1+r\cdot\sqrt{2}}{2}$ und $s=\frac{r+\sqrt{2}}{-2\cdot r}$, also

$s+t=\frac{r^2-1}{r\cdot\sqrt{2}}$ und

$2\cdot s\cdot t=\frac{r+\sqrt{2}+r^2\cdot\sqrt{2}+2\cdot r}{-2\cdot r}=-\frac{3}{2}+\frac{r^2+1}{-r\cdot\sqrt{2}}$.

Man bekommt $2\cdot S=\begin{pmatrix} t+s \\ 2\cdot s\cdot t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \end{pmatrix}+\frac{1}{r\cdot\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix} r^2-1 \\ r^2+1 \end{pmatrix}=:\begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ mit $v^2-u^2=1$. Es handelt sich also tatsächlich um eine (verschobene) rechtwinklige Hyperbel.

Was ist mit dem anderen Ast? Dieser muss zu den Werten mit $t<\frac{1}{2}$ gehören. Aufgrund der Symmetrie zur Parabelachse muss $-\frac{1}{2}<t<\frac{1}{2}$ sein (sonst kann man einfach s mit t vertauschen).

Andererseits findet man für diesen Bereich (im Bild blau) keine Punkte, von dem aus zwei Tangenten einen Winkel von 45° bilden.
Wohl aber ist der Winkel von 135° möglich, der tatsächlich zum oberen Hyperbelast gehört.