Dr. Jörg Meyer, Hameln

4. 3. 2020

Zum Flächeninhalt konvexer Sehnen-n-Ecke

Es sei Q der in Rede stehende Flächeninhalt und a, b, c, … seien die Seitenlängen..

Für $\boxed{n=3}$ hat man die Formel von HERON: $\boxed{Q=\sqrt{\sigma\cdot\sigma_a\cdot\sigma_b\cdot\sigma_c}}$ mit $\sigma=\frac{a+b+c}{2}$, $\sigma_a=\frac{-a+b+c}{2}$, $\sigma_b=\frac{a-b+c}{2}$, $\sigma_c=\frac{a+b-c}{2}$.

Für $\boxed{n=4}$ hat man die entsprechende Formel von BRAHMAGUPTA: $\boxed{Q=\sqrt{s_a\cdot s_b\cdot s_c\cdot s_d}}$

mit $s_a=\frac{-a+b+c+d}{2}$, $s_b=\frac{a-b+c+d}{2}$, $s_c=\frac{a+b-c+d}{2}$, $s_d=\frac{a+b+c-d}{2}$.

Für $\boxed{n=5}$ gibt es keine entsprechende Formel. Woran liegt das?

Sehen wir uns ein regelmäßiges n-Eck mit der Seitenlänge a an; die Figur zeigt mit dem Dreieck OAB den n-ten Teil.

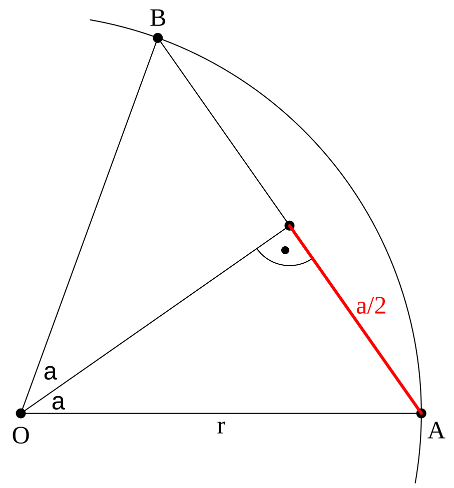
Es ist $\alpha=\frac{180^\circ}{n}$ sowie $r=\frac{a}{2\cdot\sin\alpha}$.

Dann hat das Dreieck OAB den Flächeninhalt

$$\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\sin(2\cdot\alpha)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{4\cdot\sin^2\alpha}\cdot 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{a^2}{4}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

das n-Eck hat somit den Flächeninhalt

$$Q=n\cdot\frac{a^2}{4}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$



Beim Dreieck ist $\alpha=60^\circ$ und daher $Q=3\cdot\frac{a^2}{4}\cdot\frac{\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ}=\frac{3}{4}\cdot a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot a^2$ in Übereinstimmung mit HERON.

Beim Viereck ist $\alpha=45^\circ$ und $Q=4\cdot\frac{a^2}{4}\cdot\frac{\cos 45^\circ}{\sin 45^\circ}=a^2$ in Übereinstimmung mit BRAHMAGUPTA.

Beim Fünfeck ist $\alpha=36^\circ$ und $Q=5\cdot\frac{a^2}{4}\cdot\frac{\cos 36^\circ}{\sin 36^\circ}$, und hier wird es schwierig. Wie groß ist $\sin(36^\circ)$?

Es gilt die Beziehung $\sin(5\cdot\varphi)=16\cdot\sin^5\varphi-20\cdot\sin^3\varphi+5\cdot\sin\varphi$, also für $x=\sin(36^\circ)$ die Gleichung $16\cdot x^4-20\cdot x^2+5=0$ und damit $\sin(36^\circ)=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ und $\cos(36^\circ)=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$. Daher ist

$$Q=5\cdot\frac{a^2}{4}\cdot\frac{\cos 36^\circ}{\sin 36^\circ}=5\cdot\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}=5\cdot\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{\frac{5+2\cdot\sqrt{5}}{5}}=\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}},$$

und das ist ein deutlich komplizierter Ausdruck als der für das 3- oder 4-Eck.