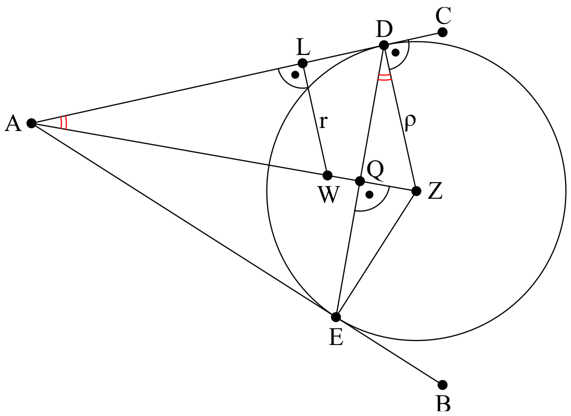
Jörg MEYER, Hameln

29. 4. 2023

Kreise, die zwei Dreiecksseiten und den Umkreis berühren

Der Umkreis zu ABC hat den Mittelpunkt M und den Radius R. Der Inkreis den Mittelpunkt W und den Radius r. Der Kreis, der AB und AC sowie den Umkreis ***innen*** berührt, habe den Mittelpunkt Z und den Radius ρ.

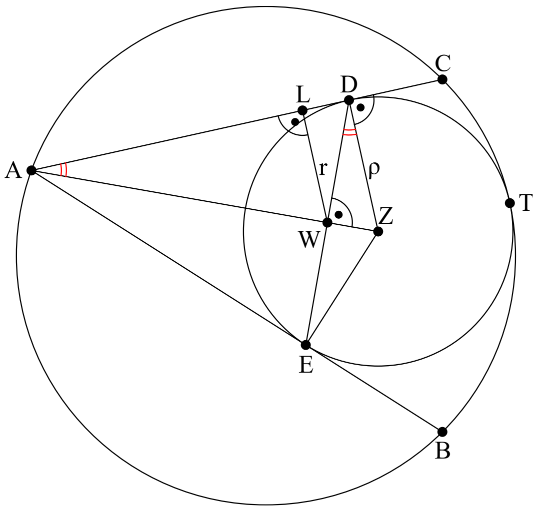


Es sei Z irgendwo auf der Innen-Winkelhalbierenden AW. Ferner seien D, E und L die entsprechenden Lotfußpunkte auf AB und auf AC. . Wegen $\frac{\rho}{r}=\frac{AZ}{AW}$ ist

$$\frac{AW}{WZ}=\frac{AW}{AZ-AW}=\frac{AW}{\frac{\rho}{r}\cdot AW-AW}=\frac{r}{\rho-r}\text{, also}$$

$$W=\frac{(\rho-r)\cdot A+r\cdot Z}{\rho}\quad\text{bzw.}\quad Z=\frac{\rho\cdot W-(\rho-r)\cdot A}{r}.$$

Ferner ist $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{AW}$, also $AW=\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{r}{\frac{QZ}{\rho}}=\frac{\rho\cdot r}{QZ}$. Zur Bestimmung von ρ wäre $Q=W$ schön:



Die Senkrechte zu AW durch W schneidet die Dreiecksseiten AC und AB in D und E.
Die Senkrechten durch D und E zu den Dreiecksseiten treffen sich in Z auf AW.
Der Kreis um Z durch B und E berührt die Dreiecksseiten.

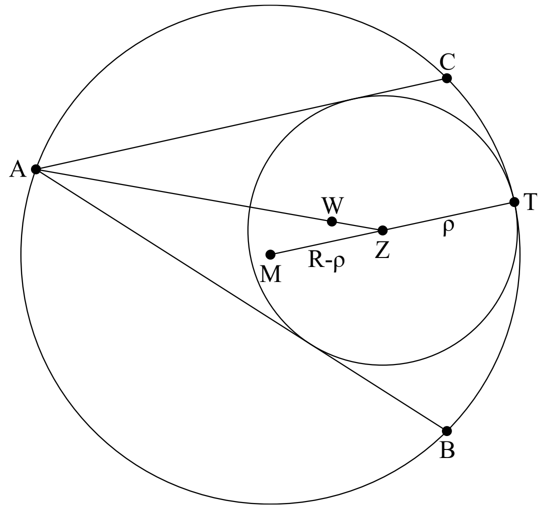
Wie oben ist $\frac{AW}{WZ}=\frac{r}{\rho-r}$ und $Z=\frac{\rho\cdot W-(\rho-r)\cdot A}{r}$,

nun ist aber auch $AW\cdot WZ=\rho\cdot r$.

Deshalb ist $WZ=\frac{AW}{r}\cdot(\rho-r)$ und $WZ=\frac{\rho\cdot r}{AW}$, also

$$\rho=\frac{AW}{\left(\frac{AW}{r}-\frac{r}{AW}\right)}=\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=\boxed{\frac{r}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\rho}\quad\text{und damit}\quad\boxed{Z=\frac{W-\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot A}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

Der Kreis um Z durch D und E berührt den Umkreis in T:

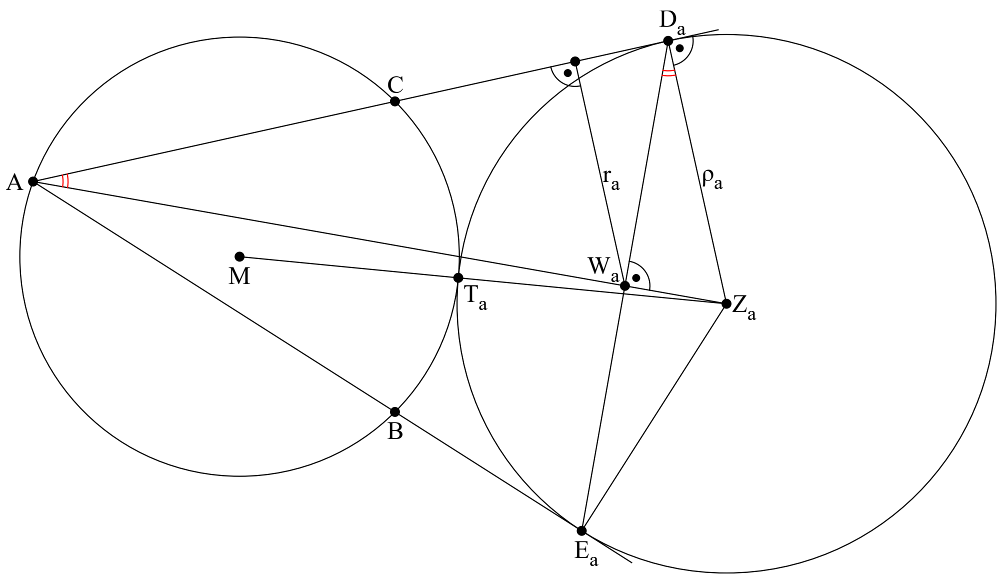


Wenn für einen Kreis um einen Punkt Z auf AW mit Radius ρ Berührung in T stattfinden soll, muss $Z=\frac{\rho\cdot M+(R-\rho)\cdot T}{R}$ sein. Andererseits muss Z die Form $Z=\frac{\rho\cdot W-(\rho-r)\cdot A}{r}$ haben, und das führt auf

$$\boxed{T=\frac{R\cdot\rho\cdot W-R\cdot(\rho-r)\cdot A-r\cdot\rho\cdot M}{r\cdot(R-\rho)}}.$$

Die Konstruktion von T ergibt sich aus der nebenstehenden Graphik bzw. aus $T=\frac{R\cdot Z-\rho\cdot M}{R-\rho}$.

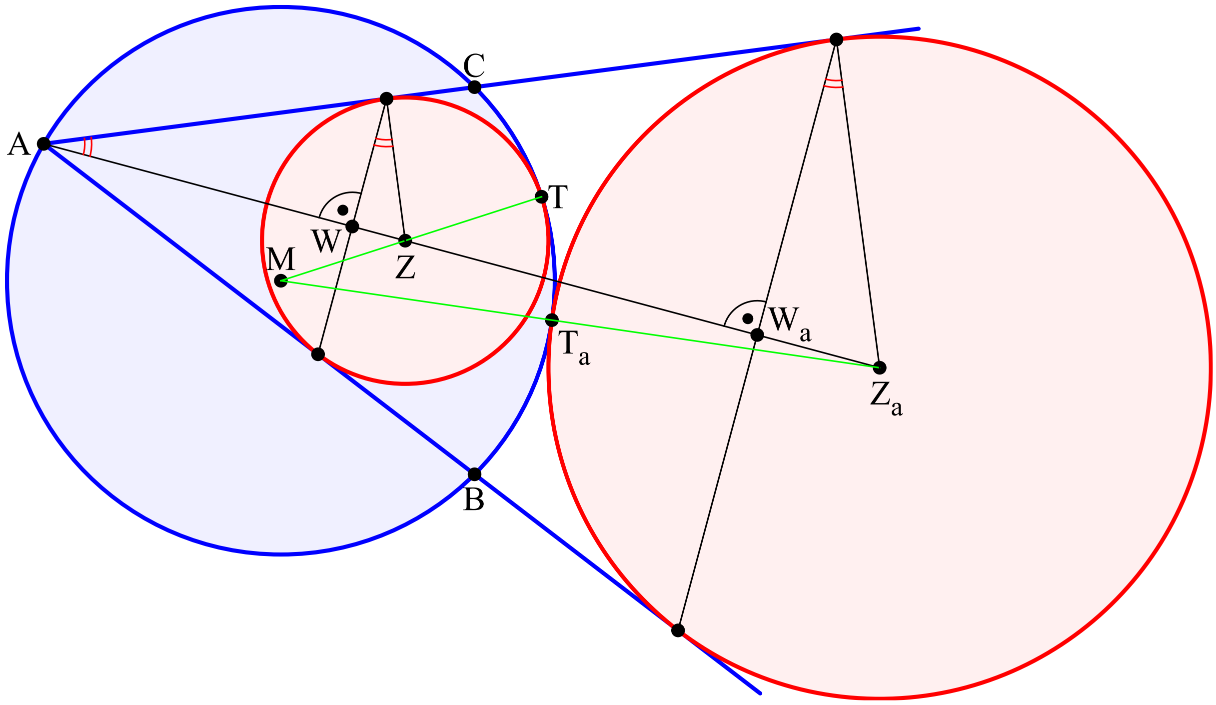
Sucht man die Kreise, die zwei Dreiecksseiten und den Umkreis von ***außen*** berühren, geht man analog vor (statt der Inkreismitte W verwendet man nun eine der Ankreismitten, etwa die des A-Ankreises).



Der A-Ankreis hat den Mittelpunkt W_a und den Radius r_a. Der AB und AC sowie den Umkreis von außen berührende Kreis habe den Mittelpunkt Z_a und den Radius ρ_a. Dann ist $\rho_a=\frac{r_a}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ und

$$Z_a=\frac{W_a-\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot A}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} \text{ sowie } T_a=\frac{\rho_a\cdot M+R\cdot Z_a}{\rho_a+R}.$$

Die folgende Graphik fasst zusammen:



C
A
T
W
M
Z
W a
T a
Z a
B