Jörg MEYER, Hameln
22. 1. 2023

Wege zur Lösung einer kubischen Gleichung

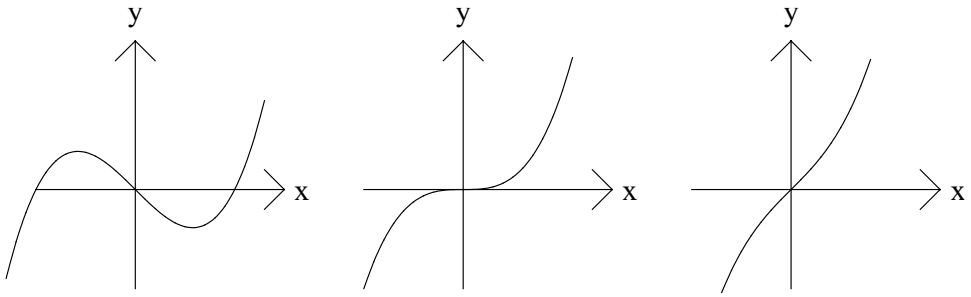
1. Einleitung

Eine kubische Gleichung in v hat die Form $v^3 + A \cdot v^2 + B \cdot v + C = 0$; sie kann durch die Parallelverschiebung $v = x - \frac{A}{3}$ auf die Form

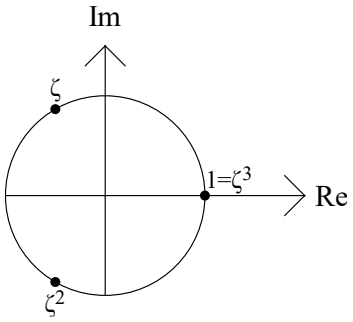
$$\boxed{x^3 + b \cdot x = -c} \tag{1}$$

gebracht werden. Für $c = 0$ benötigt man keine Lösungsformel.

Zur linken Seite von (1) gibt es drei verschiedene Typen von Graphen:



Für den zu $y = x^3$ gehörigen Typ (Mitte, $b = 0$) benötigt man wiederum keinerlei Lösungsformel, da (1) durch $x_1 = \sqrt[3]{b}$, $x_2 = \zeta \cdot x_1$, $x_3 = \zeta^2 \cdot x_1$ gelöst wird; hierbei ist $\zeta = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ eine nichttriviale dritte Einheitswurzel.



Bei den beiden anderen (zu $b > 0$ und zu $b < 0$ gehörigen) Typen ist eine von (1) abweichende Normalform günstiger:

2. Eine Normalform für die ersten beiden Wege

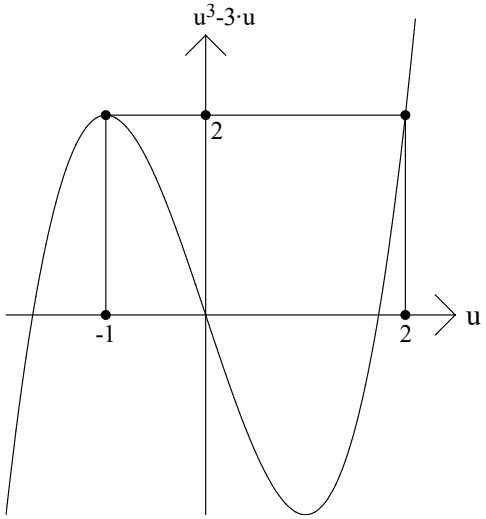
Es sei $b \cdot c \neq 0$. Ersetzt man x durch 1/y, bekommt man $y^3 + \frac{b}{c} \cdot y^2 + \frac{1}{c} = 0$, und die weitere Ersetzung $y = z - \frac{b}{3 \cdot c}$ führt auf $z^3 - \frac{b^2}{3 \cdot c^2} \cdot z + \frac{1}{c} + \frac{2 \cdot b^3}{27 \cdot c^3} = 0$. Ersetzt man schließlich z durch $u \cdot \frac{b}{3 \cdot c}$ und beseitigt die Nenner, bekommt man

$$\boxed{u^3 - 3 \cdot u = D} \text{ mit } \boxed{D = -\frac{27 \cdot c^2}{b^3} - 2}. \tag{2}$$

Die gesamte Transformation lässt sich beschreiben durch

$$x = \frac{3 \cdot c}{b \cdot (u - 1)} \text{ bzw. durch } u = \frac{3 \cdot c}{x \cdot b} + 1. \tag{3}$$

Welchen Vorteil hat die Normalform (2)?
Einerseits hat die kubische Gleichung nur noch einen einzigen Parameter (D), der sofort eine aussage darüber zulässt, wie viele reelle Lösungen es gibt.
Da man ggf. u durch $-u$ ersetzen kann, kann man sich auf positive Werte von D beschränken.
Für $D>2$ gibt es nur eine reelle Lösung.
Für $D=2$ hat man die reellen Lösungen $u_{1,2}=-1$ und $u_3=2$.
Für $0\le D<2$ gibt es drei reelle Lösungen, die alle untereinander verschieden sind.

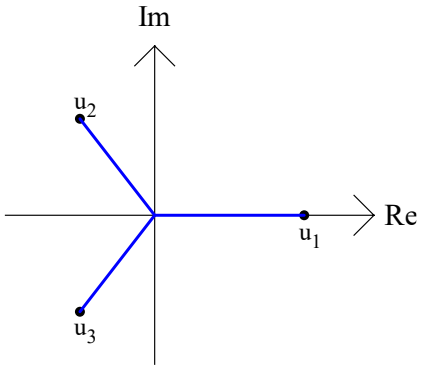


Wie findet man alle diese Lösungen?

3. Struktur der Lösungen

Ist u_1 eine Lösung von $u^3-3\cdot u=D$, so sind wegen $u^3-3\cdot u-D=(u-u_1)\cdot\left(u^2+u_1\cdot u+u_1^2-3\right)$ die beiden anderen Lösungen gegeben durch $u_{2,3}=-\frac{u_1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{4-u_1^2}}{2}$.

Am letzten Graphen ist zu erkennen, dass $4>u_1^2$ äquivalent ist zu $D^2<4$.
Für $4<u_1^2$ hat man das nebenstehende Bild.



4. Lösung von (2): Trigonometrie, Teil 1

François Viète (Vieta, 1540 – 1603) bemerkte die Ähnlichkeit zwischen

$$\boxed{u^3-3\cdot u=D} \qquad (2)$$

und der trigonometrischen Formel

$$(2\cdot\cos t)^3-3\cdot(2\cdot\cos t)=2\cdot\cos(3\cdot t) \qquad (4)$$

und substituierte daher $u=2\cdot\cos t$. Man bekommt die Werte für t aus der Beziehung

$$2\cdot\cos(3\cdot t)=D$$

und erhält

$$t_1=\frac{\arccos\left(\frac{D}{2}\right)}{3};\ t_2=\frac{\arccos\left(\frac{D}{2}\right)+2\cdot\pi}{3};\ t_3=\frac{\arccos\left(\frac{D}{2}\right)-2\cdot\pi}{3}.$$

Beispiel: $u^3-3\cdot u=D=1$, woraus sich

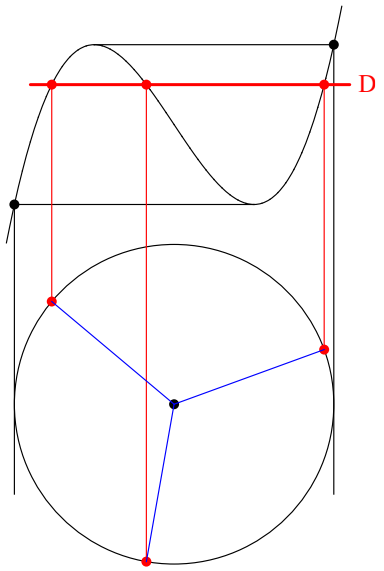
$$t=\pm\frac{\arccos\left(\frac{1}{2}\right)+k\cdot 2\cdot\pi}{3}=\pm\frac{\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{9}\cdot(1+6\cdot k)$$ und somit

$$u_1\approx 2\cdot\cos\frac{\pi}{9}\approx 0{,}9397$$

$$u_2\approx 2\cdot\cos\frac{7\cdot\pi}{9}\approx -0{,}766$$

$$u_3\approx 2\cdot\cos\frac{-5\cdot\pi}{9}\approx -0{,}1736$$

ergibt. Im Bild ist der Graph in Richtung der Hochachse gestaucht.



5. Lösung von (2): Trigonometrie, Teil 2

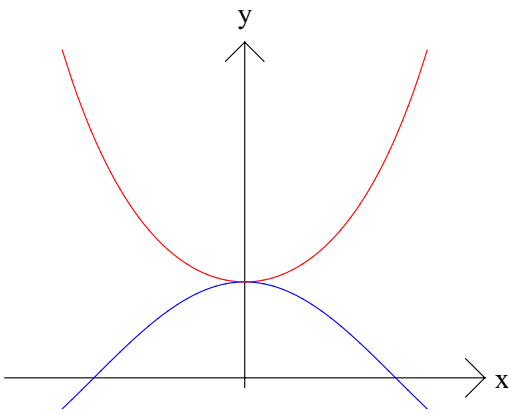
Ist $D>2$, lässt sich die Cosinusgleichung nicht mehr verwenden, jedoch kann man übergehen zur zu (4) analogen Gleichung der zugehörigen Hyperbelfunktion

$$(2\cdot\cosh t)^3-3\cdot(2\cdot\cosh t)=2\cdot\cosh(3\cdot t) \qquad (5)$$

und $u=2\cdot\cosh t$ substituieren.

Rechts ist der Cos-Graph blau und der cosh-Graph rot.

Nun ist $t=\pm\frac{\operatorname{arcosh}\left(\frac{D}{2}\right)}{3}$.



Die einzige reelle Lösung ist dann $u_1=2\cdot\cosh(t)=2\cdot\cos(i\cdot t)$, und die beiden anderen sind

$$u_{2,3}=-\frac{u_1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{4-u_1^2}}{2}=-\cosh(t)\pm\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-\cosh^2 t}=-\cosh(t)\pm\sqrt{3}\cdot i\cdot\sinh t\,.$$

Wegen $\cosh(t)=\cos(i\cdot t)$; $\sinh(t)=-i\cdot\sin(i\cdot t)$ und wegen $\cosh(x\pm y)=\cosh x\cdot\cosh y\pm\sinh x\cdot\sinh y$ ist $2\cdot\cosh\left(t\pm\frac{2\cdot\pi\cdot i}{3}\right)=2\cdot\cosh(t)\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{3}\right)\mp 2\cdot\sinh(t)\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{3}\right)=-\cosh(t)\pm i\cdot\sin(t)\cdot\sqrt{3}$, also

$u_{2,3}=2\cdot\cosh\left(t\pm\frac{2\cdot\pi\cdot i}{3}\right)$.

6. Lösung von (2): Binomische Formel

Der oben dargestellte Weg benötigt keine quadratische Resolvente. Das ist anders beim folgenden (und historisch früheren) Weg, der auf Scipione del Ferro (1465 - 1526) und Niccolò Tartaglia (1499–1557) zurückgeht (obgleich die Vorgehensweise nach Gerolamo Cardano (1501 – 1576) benannt wird). Hier wird die Ähnlichkeit von

$$\boxed{u^3-3\cdot u=D} \qquad (2)$$

mit der binomischen Formel

$$(s+t)^3-3\cdot s\cdot t\cdot(s+t)=\left(s^3+t^3\right) \tag{6}$$

ausgenutzt und bei dem $u=s+t$ mit $s\cdot t=1$ bzw. $u=s+\frac{1}{s}$ (Vieta) substituiert wird, was zu

$$\left(s^3\right)^2-D\cdot s^3+1 \text{ bzw. } \left(t^3\right)^2-D\cdot t^3+1$$

führt. Es ist dann etwa $s^3=\frac{D+\sqrt{D^2-4}}{2}$ und $t^3=\frac{D-\sqrt{D^2-4}}{2}$. Aus den (für $|D|<2$ komplexen) Zahlen s^3 und t^3 müssen dann die dritten Wurzeln gezogen werden, was jeweils drei Lösungen liefert, nämlich $s, \zeta\cdot s, \zeta^2\cdot s$ und $t, \zeta\cdot t, \zeta^2\cdot t$. Wegen $s\cdot t=1$ führt das zu den Lösungen $u_1=s+t,\ u_2=\zeta\cdot s+\frac{1}{\zeta\cdot s}=\zeta\cdot s+\zeta^2\cdot t,\ u_3=\zeta^2\cdot s+\frac{1}{\zeta^2\cdot s}=\zeta^2\cdot s+\zeta\cdot t$ der Ausgangsgleichung. Der folgende Weg greift diese Struktur auf, geht aber wieder von (1) aus, um die Lösungen einfacher kontrollieren zu können.

7. Lösung von (1): Lagrange

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) hatte die Idee, mit den noch unbekannten Lösungen u, v, w der Gleichung $\boxed{x^3+b\cdot x-c=0}$ mit der nichttrivialen 3. Einheitswurzel $\zeta=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ die Ausdrücke

$$s:=\frac{u+\zeta\cdot v+\zeta^2\cdot w}{3};\ t:=\frac{u+\zeta^2\cdot v+\zeta\cdot w}{3}$$

zu bilden, die zusammen mit $u+v+w=0$ ein dreireihiges lineares Gleichungssystem bilden mit den Lösungen $u=t+s;\ v=\zeta\cdot t+\zeta^2\cdot s;\ w=\zeta^2\cdot t+\zeta\cdot s$. Kennt man t und s, kennt man auch u, v und w.

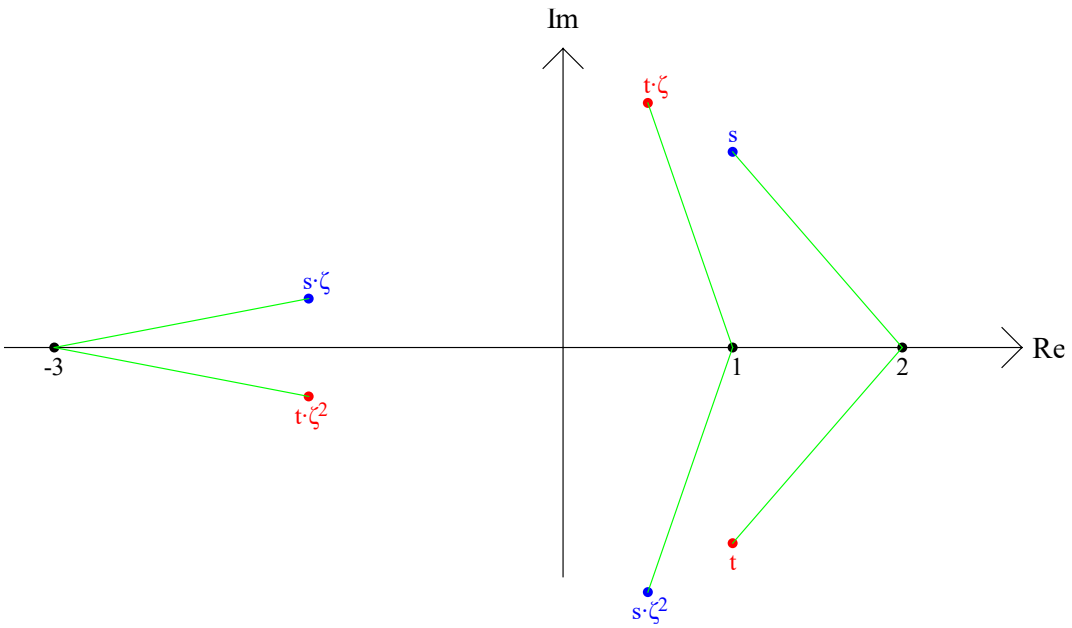
(Wegen $\zeta\cdot s=\frac{w+\zeta\cdot u+\zeta^2\cdot v}{3};\ \zeta^2\cdot s=\frac{v+\zeta\cdot w+\zeta^2\cdot u}{3}$ ist die Bevorzugung von u nur scheinbar.)

Es ist $\boxed{s\cdot t=-\frac{b}{3}}$, und mit CAS-Hilfe bekommt man $\boxed{s^3+t^3=c}$, so dass s^3 und t^3 die quadratische Gleichung $\varphi^2-c\cdot\varphi-\frac{b^3}{27}=0$ („Resolvente“) erfüllen mit $\varphi_{1,2}=\frac{c}{2}\pm\sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}}$.

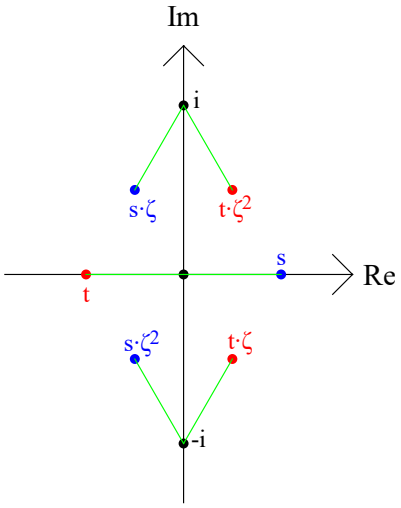
<u>Beispiel 1</u>: $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)=x^3-7\cdot x+6$, also $b=-7$ und $c=-6$. Dann

$\varphi_{1,2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{7^3}{27}}$, also etwa $s^3=-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{7^3}{27}}$ und $t^3=-\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{7^3}{27}}$. Nun sind die dritten Wurzeln zu ziehen; die Lösungen sind dann $u=t+s;\ v=t\cdot\zeta+s\cdot\zeta^2;\ w=s\cdot\zeta+t\cdot\zeta^2$.

Die schwarzen Punkte in den folgenden Graphiken geben die Lösungen an; die grünen Strecken zeigen, aus welchen Summanden sie gebildet werden:

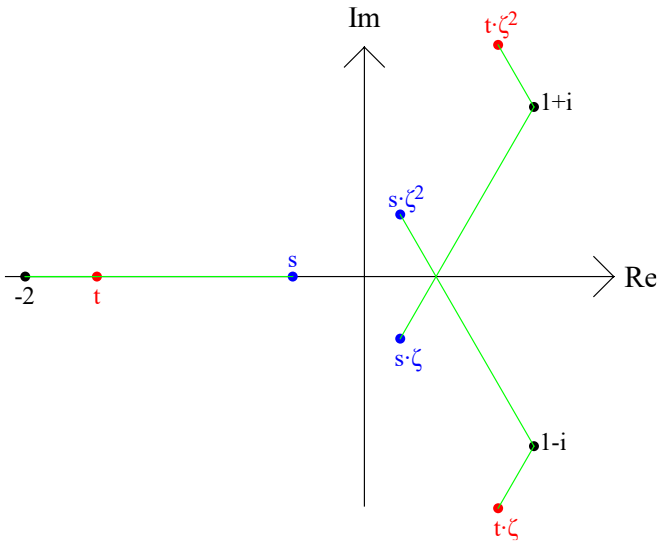


Beispiel 2: $x\cdot(x-i)\cdot(x+i)=x^3+x$, also $b=1$ und $c=0$ und den Lösungen $0, \pm i$. Dann $\varphi_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1}{27}}$.



Beispiel 3:
$(x+2)\cdot(x-i-1)\cdot(x+i-1)=x^3-2\cdot x+4$,
also $b=-2$ und $c=-4$ mit den Lösungen -2 und $1\pm i$.

Dann $\varphi_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-\frac{8}{27}}$.



8. Lösung von (2): Euler[1]

Da die Lösung einer kubischen Gleichung bei manchen Wegen zu einer quadratischen Gleichung führt, kann man auch gleich mit dieser beginnen:

Die quadratische Gleichung $Q^2 - A \cdot Q + B = 0$ habe die Wurzeln Q_1 und Q_2, und es ist $Q_1 + Q_2 = A$ und $Q_1 \cdot Q_2 = B$. Nun betrachte man $x := \zeta^i \cdot \sqrt[3]{Q_1} + \zeta^j \cdot \sqrt[3]{Q_2}$ mit ζ als nichttrivialer dritter Einheitswurzel.

Kubieren liefert $x^3 = A + 3 \cdot \zeta^{i+j} \cdot \sqrt[3]{B} \cdot x$ bzw. $x^3 - 3 \cdot \zeta^{i+j} \cdot \sqrt[3]{B} \cdot x - A = 0$.

Damit hat man für $i + j \equiv 0 \pmod 3$ sogar die (allgemeine!) kubische Gleichung

$$x^3 - 3 \cdot \sqrt[3]{B} \cdot x - A = 0$$

gelöst. Insbesondere muss man für $x^3 - 3 \cdot x - D = 0$ die quadratische Gleichung $\boxed{Q^2 - D \cdot Q + 1 = 0}$ lösen.

Die Lösungen $Q_{1,2} = \frac{D}{2} \pm \frac{\sqrt{D^2 - 4}}{2}$ liefern wegen $Q_1 \cdot Q_2 = 1$ mit $s := \sqrt[3]{Q_1}$ und $t := \sqrt[3]{Q_2} = \frac{1}{s}$ die Lösungen der kubischen Gleichung

$$x_1 = s + \frac{1}{s} = s + t;\ x_2 = \zeta \cdot s + \frac{1}{\zeta \cdot s} = \zeta \cdot s + \zeta^2 \cdot t;\ x_3 = \zeta^2 \cdot s + \frac{1}{\zeta^2 \cdot s} = \zeta^2 \cdot s + \zeta \cdot t.$$

9. Lösung von (2): Direkter Weg

Nach diesen heuristischen Zugängen nun, davon motiviert, ein direkter Weg: Zu lösen ist

$$\boxed{u^3 - 3 \cdot u - D = 0}. \qquad (2)$$

Wegen $\left(u - (s + t)\right) \cdot \left(u - \left(\zeta \cdot s + \zeta^2 \cdot t\right)\right) \cdot \left(u - \left(\zeta^2 \cdot s + \zeta \cdot t\right)\right) = u^3 - 3 \cdot s \cdot t \cdot u - \left(s^3 + t^3\right)$ hat man die Lösungen von (2) aus $s \cdot t = 1$ und $s^3 + \frac{1}{s^3} = D$; die letzte Gleichung ist quadratisch in s^3.

[1] Analogon zu Euler, Leonhard (1770): Vollständige Anleitung zur Algebra, 2. Teil, 1. Abschnitt, Kap. 15.