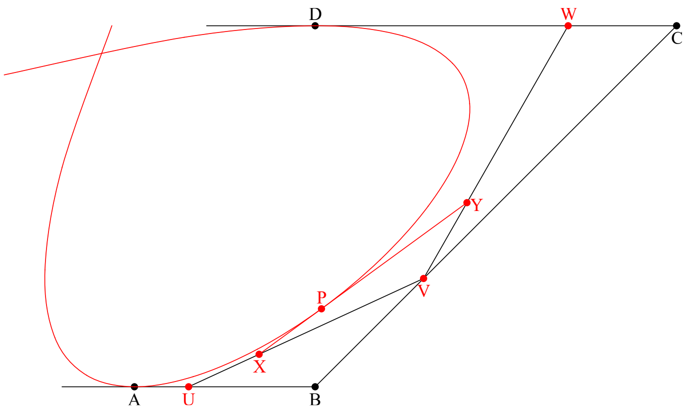
Jörg MEYER, Hameln

12. November 2023

Beispiele für kubische Bézierkurven: Divergente Parabeln

Allgemeines zu ganzen kubischen Bézierkurven

Eine ganze kubische Bézierkurve hat mit $s := 1 - t$, den Kurvenpunkten A und D und den Kontrollpunkten B und C sowie mit $U = s \cdot a + t \cdot B$, $V = s \cdot B + t \cdot C$, $W = s \cdot C + t \cdot D$, $X = s \cdot U + t \cdot V$, $Y = s \cdot V + t \cdot W$, $P = s \cdot X + t \cdot Y$ den allgemeinen Punkt $P(t) = s^3 \cdot A + 3 \cdot s^2 \cdot t \cdot B + 3 \cdot s \cdot t^2 \cdot C + t^3 \cdot D$. („Ganz" bedeutet, dass P(t) kein Nennerpolynom in t aufweist.)

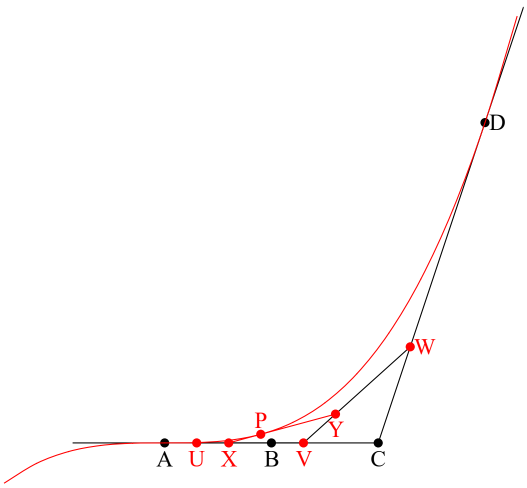


Beispiel:

$$\overset{A}{s^3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + 3 \cdot s^2 \cdot t \cdot \overset{B}{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}} + 3 \cdot s \cdot t^2 \cdot \overset{C}{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}} + t^3 \cdot \overset{D}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} t \cdot (s+t)^2 \\ t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix}$$

mit $s = 1 - t$ beschreibt die **kubische Parabel**.



Divergente Parabeln

Die Kurve mit dem allgemeinen Punkt $K_v(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \cdot (t^2 + v) \end{pmatrix}$ heißt divergente Parabel und hat die Gleichung $y^2 = x \cdot (x + v)^2$. Eine solche Kurve kann Wendepunkte, Doppelpunkte oder Spitzen aufweisen. Stets ist $K_v(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $K_v(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+v \end{pmatrix}$.

Divergente Parabeln lassen sich wegen

$$\begin{pmatrix} t^2 \\ t\cdot\left(t^2+v\right) \end{pmatrix} = s^3\cdot\overset{A}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + 3\cdot s^2\cdot t\cdot\overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ v/3 \end{pmatrix}}^{B} + 3\cdot s\cdot t^2\cdot\overbrace{\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2\cdot v/3 \end{pmatrix}}^{C} + t^3\cdot\overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ v+1 \end{pmatrix}}^{D}$$

auch als Bézier-Kurven darstellen. Man kann also die in vielen Programmen vorhandenen Bézier-Graphik-Primitiven verwenden, die man noch an der Rechtsachse spiegeln muss.

Spitzen

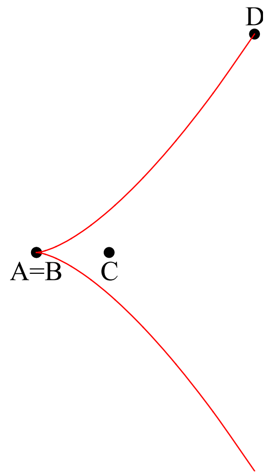
Ein hinreichendes Kriterium für **Spitzen** ist $K_v\,'(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $K_v\,''(t)\neq\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, also

$K_v\,'(t)=\begin{pmatrix} 2\cdot t \\ 3\cdot t^2+v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $K_v\,''(t)=\begin{pmatrix} 2 \\ 6\cdot t \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, was auf $t=0$ und auf $v=0$ führt.

Für $v=0$ hat man die **Neil'sche Parabel** mit

$\begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}=s^3\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}+3\cdot s^2\cdot t\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}+3\cdot s\cdot t^2\cdot\begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}+t^3\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $s=1-t$.

Der Kurvenpunkt A ist gleichzeitig Kontrollpunkt.



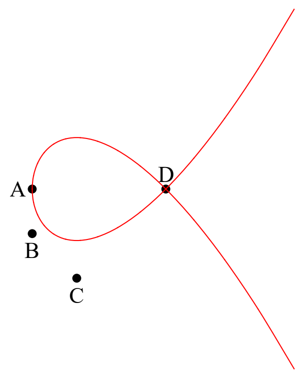
Doppelpunkte

Ein hinreichendes Kriterium für **Doppelpunkte** ist $K_v(t)=K_v(s)$ für $t\neq s$ und $K_v\,'(t)\neq K_v\,'(s)$. Dies führt auf $\begin{pmatrix} t^2 \\ t\cdot\left(t^2+v\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s^2 \\ s\cdot\left(s^2+v\right) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2\cdot t \\ 3\cdot t^2+v \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 2\cdot s \\ 3\cdot s^2+v \end{pmatrix}$, also auf $s=-t$ und auf $\begin{pmatrix} t^2 \\ t\cdot\left(t^2+v\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t^2 \\ -t\cdot\left(t^2+v\right) \end{pmatrix}$. Wegen $s=-t$ ist $t\neq 0$ und daher $t=\pm\sqrt{-v}$. Doppelpunkte existieren daher nur für $v<0$.

Für $v=-1$ hat man die **Tschirnhaus-Kubik** mit

$\begin{pmatrix} t^2 \\ t\cdot\left(t^2-1\right) \end{pmatrix}=s^3\cdot\overset{A}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}+3\cdot s^2\cdot t\cdot\overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}}^{B}+3\cdot s\cdot t^2\cdot\overbrace{\begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}}^{D}+t^3\cdot\overset{D}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$ und $s=1-t$.

Sie hat in D einen Doppelpunkt.



Wendepunkte

Der allgemeine Punkt der divergenten Parabel ist $K_v(t)=\begin{pmatrix} t^2 \\ t\cdot(t^2+v) \end{pmatrix}$. Der Tangenten-Richtungsvektor an der Stelle b ist $\begin{pmatrix} 2\cdot b \\ 3\cdot b^2+v \end{pmatrix}$, der allgemeine Punkt der Tangente an dieser Stelle ist mithin $X=\begin{pmatrix} b^2 \\ b\cdot(b^2+v) \end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix} 2\cdot b \\ 3\cdot b^2+v \end{pmatrix}$; er erfüllt die Gleichung

$$X\cdot\begin{pmatrix} 3\cdot b^3+v \\ -2\cdot b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b^2 \\ b\cdot(b^2+v) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3\cdot b^2+v \\ -2\cdot b \end{pmatrix}=b^4-v\cdot b^2.$$

Die Schnittgleichung von Tangente und Kurve lautet $\begin{pmatrix} t^2 \\ t\cdot(t^2+v) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3\cdot b^3+v \\ -2\cdot b \end{pmatrix}=b^4-v\cdot b^2$. Sie hat erwartungsgemäß die doppelte Nullstelle $t=b$ und enthält den Linearfaktor $2\cdot b\cdot t+b^2-v$.

Bei einem Wendepunkt durchsetzt die dortige Tangente die Kurve. Soll die Tangente die Kurve durchsetzen, muss $t=b$ sogar dreifache Nullstelle sein, also muss $2\cdot b\cdot b+b^2-v=3\cdot b^2-v=0$ sein.

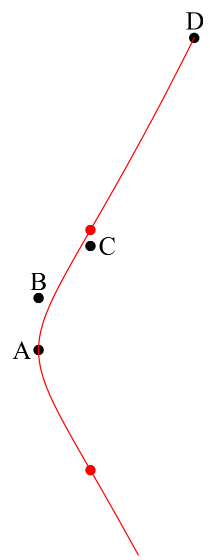
Die **Wendestellen** sind somit $b=\pm\sqrt{\frac{v}{3}}$ und existieren nur für $v>0$.

Für $v=1$ hat man die **kubische Duplikatrix** mit

$$\begin{pmatrix} t^2 \\ t\cdot(t^2+1) \end{pmatrix}=s^3\cdot\overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{A}+3\cdot s^2\cdot t\cdot\overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}}^{B}+3\cdot s\cdot t^2\cdot\overbrace{\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}}^{C}+t^3\cdot\overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}^{D}$$ und $s=1-t$.

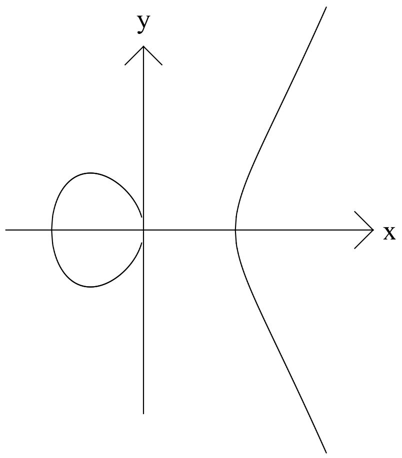
Sie hat für den imaginären Parameter i den reellen **Einsiedlerpunkt** $K_1(i)=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

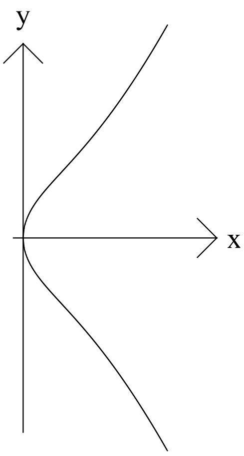
Bei $t=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ sind Wendepunkte (rote Punkte). Der obere Wendepunkt ist $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ und hat die gleiche x-Koordinate wie C.



Ausblick auf elliptische Kurven

Die rechte Seite von $y^2=x\cdot(x+v)^2$ hat eine einfache und eine doppelte Nullstelle (die mit der einfachen zusammenfallen kann). Sind die Wurzeln paarweise verschieden (Bsp.: $y^2=x\cdot(x^2-1)$; links oder $y^2=x\cdot(x^2+1)$; rechts), so ist die Kurve elliptisch und nicht mehr als Bézier-Kurve darstellbar.


y
x


y
x