Jörg MEYER, Hameln ergänzt am 14. 12. 2024

# Wege zur Lösung der kubischen Gleichung

## Inhalt



## Transformation zur Normalform

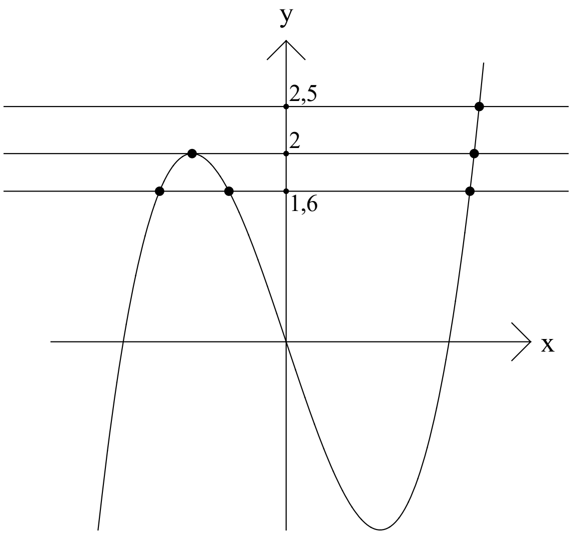
Führt man bei der kubischen Gleichung $y^3 + r\cdot y^2 + s\cdot y + t = 0$ die Transformation $y = z - \frac{r}{3}$ durch, bekommt man $z^3 + b\cdot z + c = 0$.

Für $b = 0$ kann man die Lösungen sofort hinschreiben. Es sei also $b \neq 0$.

Ersetzt man z durch $z = \frac{3\cdot c}{b\cdot(x-1)}$, führt das zu

$\boxed{x^3 - 3\cdot x = D}$ mit passendem D, das (ggf. nach Vertauschung von x mit -x) positiv gewählt werden kann.

Für $D = 2$ gibt es die doppelte Nullstelle $x = 1$ und die einfache Nullstelle $x = -2$.




Für $D > 2$ gibt es nur eine reelle Nullstelle, und für $0 \leq D < 2$ gibt es drei reelle Nullstellen.

Der Vorteil dieser Normalform ist, nur noch einen einzigen Parameter zu haben, an dem man sofort sieht, wie viele reelle Nullstellen es gibt.

Im Folgenden werden oftmals drei typische Werte für D so gewählt, nämlich $D = 2$, $D = 5/2$ und $D = 8/5$, so dass Quadratwurzeln gut zu ziehen sind, um die Rechnungen übersichtlich zu gestalten.

Ständig gebraucht wird die nichttriviale 3. Einheitswurzel $\boxed{\zeta = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}}$ mit den Gleichungen $\zeta^3 = 1$ und $\zeta^2 + \zeta + 1 = 0$.

## Substitution nach Vieta

François Viète (Vieta, 1540 – 1603) verwendete für $x^3-3\cdot x=D$ die Substitution $x=\lambda+\frac{1}{\lambda}$ mit dem Ergebnis $\lambda^6-D\cdot\lambda^3+1=0$ und den Lösungen $\lambda_{1,2}^3=\frac{D\pm\sqrt{D^2-4}}{2}$, woraus $\lambda=\zeta^a\cdot\sqrt[3]{\frac{D+\sqrt{D^2-4}}{2}}$ und $\frac{1}{\lambda}=\zeta^{2\cdot a}\cdot\sqrt[3]{\frac{D-\sqrt{D^2-4}}{2}}$ folgt.

Ist $D<2$, so sind $\lambda$ und $\frac{1}{\lambda}$ stets zueinander konkugiert-komplex, so dass

$x_a=\zeta^a\cdot\sqrt[3]{\frac{D+\sqrt{D^2-4}}{2}}+\zeta^{2\cdot a}\cdot\sqrt[3]{\frac{D-\sqrt{D^2-4}}{2}}$ stets reell ist.

Für $\boxed{D=2}$ ist $x_a=\zeta^a+\zeta^{2\cdot a}$ und damit $x_0=2;\ x_1=-1;\ x_2=-1$.

Für $\boxed{D=\frac{5}{2}}$ ist $x_a=\zeta^a\cdot\sqrt[3]{\frac{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}{2}}\times+\zeta^{2\cdot a}\cdot\sqrt[3]{\frac{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}{2}}=\zeta^a\cdot\sqrt[3]{2}+\zeta^{2\cdot a}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. Nur $x_0=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ ist reell.

Für $\boxed{D=\frac{8}{5}}$ ist $x_a=\zeta^a\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\cdot i}+\zeta^{2\cdot a}\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\cdot i}$ stets reell.

## Der trigonometrische Weg nach Vieta

Vieta bemerkte die Ähnlichkeit zwischen $\boxed{x^3-3\cdot x=D}$ und der trigonometrischen Formel

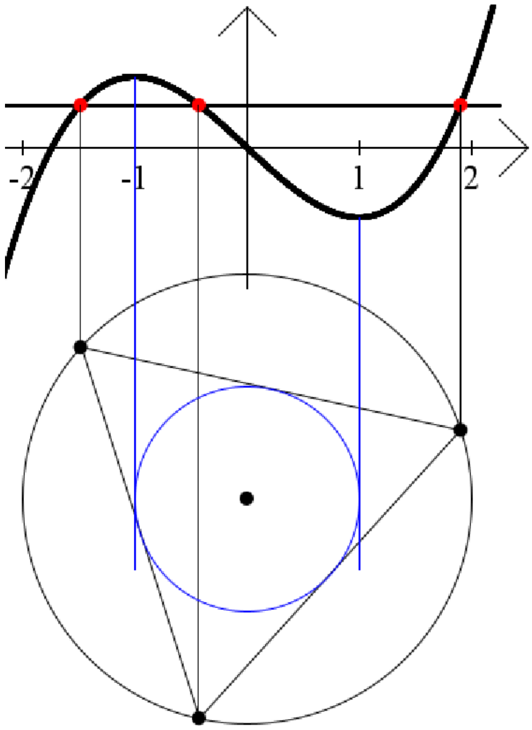
$$(2\cdot\cos t)^3-3\cdot(2\cdot\cos t)=2\cdot\cos(3\cdot t) \qquad (*)$$

und substituierte daher $x=2\cdot\cos t$. Man bekommt die Werte für t aus der Beziehung

$$2\cdot\cos(3\cdot t)=D$$

und erhält

$$t_1=\frac{\arccos\left(\frac{D}{2}\right)}{3};\ t_2=\frac{\arccos\left(\frac{D}{2}\right)+2\cdot\pi}{3};\ t_3=\frac{\arccos\left(\frac{D}{2}\right)-2\cdot\pi}{3}.$$




Beispiel: $\boxed{D=1}$ führt auf

$$t=\pm\frac{\arccos\left(\frac{1}{2}\right)+k\cdot 2\cdot\pi}{3}=\pm\frac{\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{9}\cdot(1+6\cdot k)$$

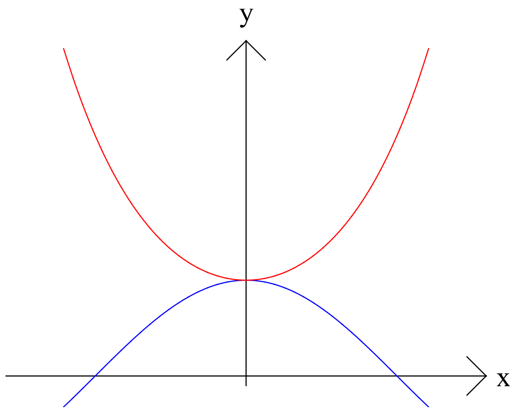
und somit

$$u_1\approx 2\cdot\cos\frac{\pi}{9}\approx 0{,}9397$$

$$u_2\approx 2\cdot\cos\frac{7\cdot\pi}{9}\approx -0{,}766$$

$$u_3\approx 2\cdot\cos\frac{-5\cdot\pi}{9}\approx -0{,}1736$$

ergibt. Im Bild ist der Graph in Richtung der Hochachse gestaucht.




Ist $D>2$, lässt sich die Cosinusgleichung (*) nicht mehr verwenden, jedoch kann man übergehen zur zu (**) analogen Gleichung der zugehörigen Hyperbelfunktion

$$(2\cdot\cosh t)^3-3\cdot(2\cdot\cosh t)=2\cdot\cosh(3\cdot t) \qquad (**)$$

und $u=2\cdot\cosh t$ substituieren.
Rechts ist der Cos-Graph blau und der cosh-Graph rot.

Nun ist $t=\pm\frac{\operatorname{arcosh}\left(\frac{D}{2}\right)}{3}$.

Die einzige reelle Lösung ist dann $u=2\cdot\cosh(t)=2\cdot\cos(i\cdot t)$.

## Der Weg über die binomische Formel nach CARDANO und Vorläufern

Dieser Weg ist der historisch früheste und geht zurück auf Scipione del FERRO (1465 - 1526) und Niccolò TARTAGLIA (1499–1557) (obgleich die Vorgehensweise nach Gerolamo CARDANO (1501 – 1576) benannt wird).

Hier wird die Ähnlichkeit von $\boxed{x^3-3\cdot x=D}$ mit der binomischen Formel

$$(s+t)^3-3\cdot s\cdot t\cdot(s+t)=\left(s^3+t^3\right)$$

ausgenutzt und bei dem $x=s+t$ mit $s\cdot t=1$ bzw. $x=s+\frac{1}{s}$ (Vieta) substituiert wird, was zu

$$\left(s^3\right)^2-D\cdot s^3+1=0 \text{ bzw. } \left(t^3\right)^2-D\cdot t^3+1=0$$

führt. Es ist dann etwa $s^3=\frac{D+\sqrt{D^2-4}}{2}$ und $t^3=\frac{D-\sqrt{D^2-4}}{2}$.

Die Fortsetzung gestaltet sich wie beim 1. Weg nach VIETA.

## Der Weg von LAGRANGE über symmetrische Funktionen

Der Weg von Joseph-Louis LAGRANGE (1736–1813) ist zwar aufwändiger als der (oben dargestellte) trigonometrische Weg nach VIETA, ist jedoch im Gegensatz zu letzterem verallgemeinerungsfähig.

**Orientierung an der quadratischen Gleichung**

Für ein quadratisches Polynom mit den Nullstellen u und v gilt

$$x^2+p\cdot x+q=(x-u)\cdot(x-v)=x^2-(u+v)\cdot x+u\cdot v\ .$$

Daher ist $p=-(u+v)$, $q=u\cdot v$ (Satz von VIETA). Wie bekommt man u und v, wenn p und q gegeben sind?

Wegen $(u-v)^2=(u+v)^2-4\cdot u\cdot v=p^2-4\cdot q$ ist $u-v=\pm\sqrt{p^2-4\cdot q}$. Addiert man zu dieser Gleichung die Beziehung $u+v=-p$, bekommt man $u=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4\cdot q}}{2}$ und $v=-p-u=\frac{-p\mp\sqrt{p^2-4\cdot q}}{2}$.

**Symmetrische Funktionen bei der kubischen Gleichung**

Wegen

$$x^3-3\cdot x-D=(x-u)\cdot(x-v)\cdot(x-w)=x^3-(u+v+w)\cdot x^2+(u\cdot v+v\cdot w+w\cdot u)\cdot x-u\cdot v\cdot w$$

ist

$$\begin{aligned} u+v+w&=0\\ u\cdot v+v\cdot w+w\cdot u&=-3\\ u\cdot v\cdot w&=D \end{aligned}$$

Bei quadratischen Polynomen hatte man $u+v$ mit $u-v$ in Beziehung gesetzt. Bei kubischen Polynomen ist die Verwendung einer dritten Einheitswurzel $\zeta=\frac{-1+i\cdot\sqrt{3}}{2}$ naheliegend; es ist $\zeta^2=\frac{-1-i\cdot\sqrt{3}}{2}$ und $\zeta^3=1$ sowie $1+\zeta+\zeta^2=0$.

Man bilde nun nicht $u+v$, $u-v$, sondern

$$\begin{aligned} \lambda_1&=u+v+w\quad(=0)\\ \lambda_2&=u+\zeta\cdot v+\zeta^2\cdot w\\ \lambda_3&=u+\zeta^2\cdot v+\zeta\cdot w \end{aligned}$$

Diese drei Ausdrücke heißen LAGRANGE-Resolventen. Wenn man sie kennt, kennt man u, v, w:

$$\lambda_2+\lambda_3=\left(u+\zeta\cdot v+\zeta^2\cdot w\right)+\left(u+\zeta^2\cdot v+\zeta\cdot w\right)=2\cdot u-v-w=3\cdot u$$
$$\zeta\cdot\lambda_2+\zeta^2\cdot\lambda_3=\zeta\cdot\left(u+\zeta\cdot v+\zeta^2\cdot w\right)+\zeta^2\cdot\left(u+\zeta^2\cdot v+\zeta\cdot w\right)=-u-v+2\cdot w=3\cdot w$$
$$\zeta^2\cdot\lambda_2+\zeta\cdot\lambda_3=\zeta^2\cdot\left(u+\zeta\cdot v+\zeta^2\cdot w\right)+\zeta\cdot\left(u+\zeta^2\cdot v+\zeta\cdot w\right)=-u+2\cdot v-w=3\cdot v$$

Wie ermittelt man $\lambda_2=u+\zeta\cdot v+\zeta^2\cdot w$, $\lambda_3=u+\zeta^2\cdot v+\zeta\cdot w$ ?

Idee: Vertauscht man v und w, so bekommt man aus $\lambda_2$ den Ausdruck $\lambda_3$ und umgekehrt.

Vertauscht man u und v bei $\lambda_2$, bekommt man $\zeta\cdot u+v+\zeta^2\cdot w=\zeta\cdot\lambda_3$, und bei $\lambda_3$ bekommt man $\zeta^2\cdot u+v+\zeta\cdot w=\zeta^2\cdot\lambda_2$.

Daher sind die Polynome $\lambda_2\cdot\lambda_3$ und $\lambda_2^3+\lambda_3^3$ invariant bei allen Vertauschungen zweier Elemente.

Auch die Ausdrücke für die Koordinaten

$$u+v+w=0$$
$$u\cdot v+v\cdot w+w\cdot u=-3$$
$$u\cdot v\cdot w=D$$

sind invariant bei allen Vertauschungen zweier Elemente, daher werden sich $\lambda_2\cdot\lambda_3$ und $\lambda_2^3+\lambda_3^3$ durch die Koordinaten -3 und -D ausdrücken lassen. Das ist die entscheidende Einsicht[1]! Es ist

$$\begin{aligned}\lambda_2\cdot\lambda_3&=\left(u+\zeta\cdot v+\zeta^2\cdot w\right)\cdot\left(u+\zeta^2\cdot v+\zeta\cdot w\right)\\&=u^2+v^2+w^2+\zeta^2\cdot(u\cdot v+v\cdot w+w\cdot u)+\zeta\cdot(u\cdot w+u\cdot v+w\cdot v)\\&=u^2+v^2+w^2+3\\&=(u+v+w)^2-2\cdot u\cdot v-2\cdot v\cdot w-2\cdot w\cdot u+3\\&=9\end{aligned}$$

und (CAS!)

$$\lambda_2^3+\lambda_3^3=27\cdot u\cdot v\cdot w=27\cdot D\,.$$

Mit Summe und Produkt kann man eine quadratische Gleichung aufstellen:

$$\left(\lambda^3\right)^2-\left(\lambda_2^3+\lambda_3^3\right)\cdot\lambda^3+\left(\lambda_2\cdot\lambda_3\right)^3=0$$
$$\left(\lambda^3\right)^2-27\cdot D\cdot\lambda^3+27^2=0$$
$$\lambda_{2,3}^3=\frac{27\cdot D}{2}\pm\sqrt{\frac{27^2\cdot D^2}{4}-27^2}=-\frac{27\cdot D}{2}\pm\frac{27}{2}\cdot\sqrt{D^2-4}=\frac{27}{2}\cdot\left(D\pm\sqrt{D^2-4}\right)$$

Die Fortsetzung gestaltet sich wie beim 1. Weg nach VIETA.

[1] Hintergrund: Das ist der Satz über symmetrische Funktionen.

## Der Lösungsweg von EULER[2]

Da die Lösung einer kubischen Gleichung bei manchen Wegen zu einer quadratischen Gleichung führt, kann man auch gleich mit dieser beginnen:

Die quadratische Gleichung $Q^2 - A\cdot Q + B = 0$ habe die Wurzeln $Q_1$ und $Q_2$, und es ist $Q_1 + Q_2 = A$ und $Q_1 \cdot Q_2 = B$. Nun betrachte man $x := \zeta^a \cdot \sqrt[3]{Q_1} + \zeta^{3-a} \cdot \sqrt[3]{Q_2}$ mit $\zeta$ als nichttrivialer dritter Einheitswurzel.

Kubieren liefert $x^3 - 3\cdot\sqrt[3]{B}\cdot x = A$, also hat man sogar die (allgemeine!) kubische Gleichung gelöst.

Insbesondere muss man für $x^3 - 3\cdot x - D = 0$ nur die quadratische Gleichung $\boxed{Q^2 - D\cdot Q + 1 = 0}$ lösen mit dem Ergebnis $Q_{1,\,2} = \frac{D}{2} \pm \sqrt{\frac{D^2}{4} - 1}$.

Die Fortsetzung gestaltet sich wie beim 1. Weg nach VIETA.

## Basiswechsel[3]

Gesucht sind die Lösungen von $f(x) = x^3 - 3\cdot x - D = 0$. Dies wird recht einfach, wenn man

$$\boxed{f(x) = c\cdot(x-u)^3 + (1-c)\cdot(x-v)^3}$$

schreibt mit passenden c und $u \neq v$. Wegen

$$f(x) = x^3 + 3\cdot x^2 \cdot \left(c\cdot(v-u) - v\right) - 3\cdot x\cdot\left(c\cdot\left(v^2 - u^2\right) - v^2\right) + c\cdot\left(v^3 - u^3\right) - v^3$$

führt ein Koeffizientenvergleich zu den Bedingungen

$$c\cdot(v-u) = v$$

$$1 = c\cdot\left(v^2 - u^2\right) - v^2 = c\cdot(v-u)\cdot(v+u) - v^2 = v\cdot(v+u) - v^2 = v\cdot u$$

$$-D = c\cdot\left(v^3 - u^3\right) - v^3 = c\cdot(v-u)\cdot\left(v^2 + u\cdot v + u^2\right) - v^3 = v\cdot\left(v^2 + u\cdot v + u^2\right) - v^3 = u\cdot v\cdot(u+v) = u+v$$

Damit erfüllen u und v die quadratische Gleichung $\boxed{Q^2 + D\cdot Q + 1 = 0}$ und sind somit bekannt.

Wegen $\frac{c-1}{c} = \frac{\frac{v}{v-u} - 1}{\frac{v}{v-u}} = \frac{v - (v-u)}{v} = \frac{u}{v}$ schreibt sich die Ausgangsgleichung

$c\cdot(x-u)^3 + (1-c)\cdot(x-v)^3 = 0$ auch als $v\cdot(x-u)^3 = u\cdot(x-v)^3$ und mit $\omega_a := \sqrt[3]{\frac{u}{v}}\cdot\zeta^a$ einfach als $x - u = \omega_i\cdot(x-v)$, und diese lineare Gleichung ist leicht zu lösen:

---

[2] Analogon zu Euler, Leonhard (1770): Vollständige Anleitung zur Algebra, 2. Teil, 1. Abschnitt, Kap. 15.

[3] Rota, Gian-Carlo (1999): Two Turning Points in Invariant Theory. Math. Intelligencer vol. 21, no. 1, p. 25.

$$x_a = \frac{u - \omega_a \cdot v}{1 - \omega_a} = \frac{u - \sqrt[3]{\frac{u}{v}} \cdot \zeta^a \cdot v}{1 - \sqrt[3]{\frac{u}{v}} \cdot \zeta^a} = \frac{u \cdot \sqrt[3]{v} - v \cdot \sqrt[3]{u} \cdot \zeta^a}{\sqrt[3]{v} - \sqrt[3]{u} \cdot \zeta^a} = \frac{u \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{u}} - \frac{1}{u} \cdot \sqrt[3]{u} \cdot \zeta^a}{\sqrt[3]{\frac{1}{u}} - \sqrt[3]{u} \cdot \zeta^a} = \frac{u^{2/3} - u^{-2/3} \cdot \zeta^a}{u^{-1/3} - u^{1/3} \cdot \zeta^a}$$

$$= u^{1/3} \cdot \zeta^{-a} + u^{-1/3} \cdot \zeta^a$$