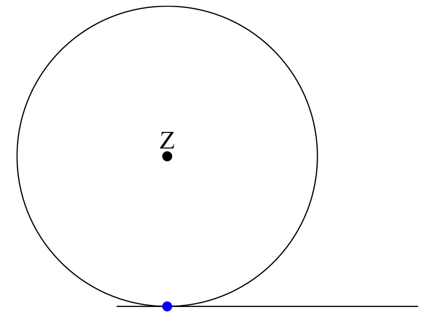
Jörg MEYER, Hameln

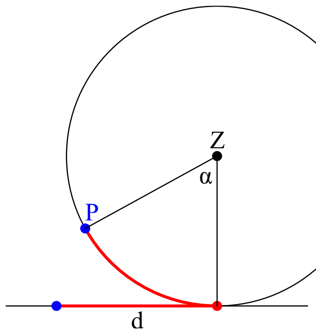
9. 2. 2023

Zykloiden, Epizykloiden, Hypozykloiden

Zykloiden

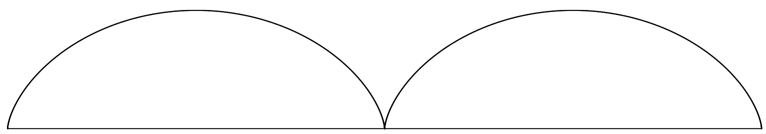
Ein Kreis rollt auf einer Geraden ab. Was wird aus dem blauen Berührpunkt (links)?





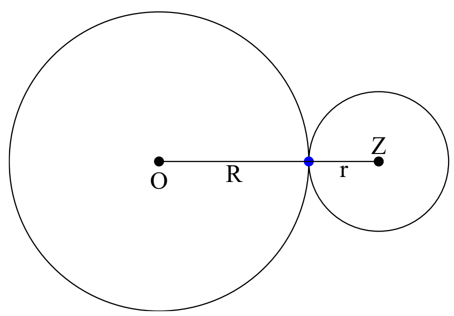
Aus dem ursprünglichen Berührpunkt ist ein blauer Punkt (rechts) geworden, der auf dem Kreis einen Bogen mit dem Mittelpunktswinkel α der Länge $d = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$ zurückgelegt hat.

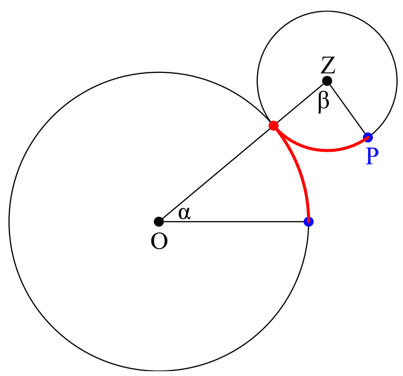
Damit ist $P = Z + R \cdot \begin{pmatrix} \cos(270^\circ - \alpha) \\ \sin(270^\circ - \alpha) \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} \alpha \cdot \frac{2 \cdot \pi}{360^\circ} \\ 0 \end{pmatrix} - R \cdot \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$.



Epizykloiden

Ein Kreis (Radius r) rollt auf einem anderen Kreis (Radius R) außen ab. Was wird aus dem blauen Berührpunkt (links)?





Aus dem ursprünglichen Berührpunkt ist ein blauer Punkt (rechts) geworden, der auf dem festen Kreis einen Bogen mit Mittelpunktswinkel α und auf dem beweglichen Kreis einen gleich langen Bogen mit dem Mittelpunktswinkel β zurückgelegt hat.

Wegen $2\cdot\pi\cdot R\cdot\frac{\alpha}{360°}=2\cdot\pi\cdot r\cdot\frac{\beta}{360°}$ ist $\beta=\frac{R}{r}\cdot\alpha$.

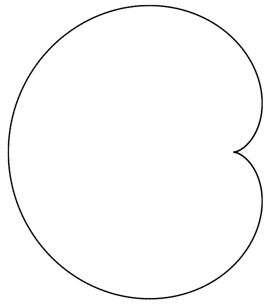
Der alte blaue Berührpunkt P hat nun die Form

$$P=Z+r\cdot\begin{pmatrix}\cos(180°+\alpha+\beta)\\ \sin(180°+\alpha+\beta)\end{pmatrix}=(R+r)\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}-r\cdot\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta)\end{pmatrix}.$$

Im einfachsten Fall ist $R=r$, und man bekommt mit

$$P=2\cdot r\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}-r\cdot\begin{pmatrix}\cos 2\cdot\alpha\\ \sin 2\cdot\alpha\end{pmatrix}$$

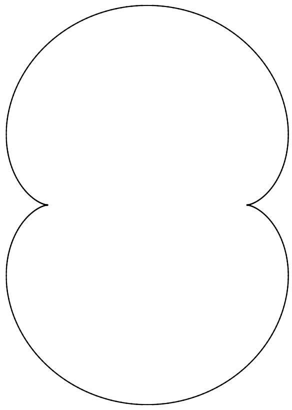
eine Cardioide.



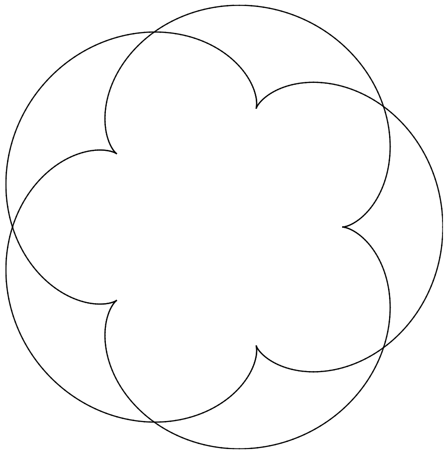
Für $R=2\cdot r$ bekommt man mit

$$P=3\cdot r\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}-r\cdot\begin{pmatrix}\cos 3\cdot\alpha\\ \sin 3\cdot\alpha\end{pmatrix}$$

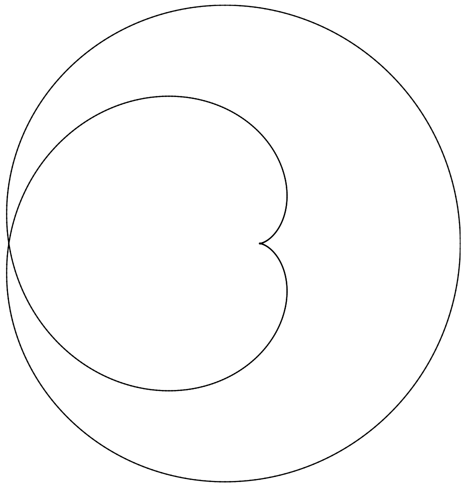
eine Nephroide.



R/r muss nicht ganzzahlig sein. Für $\frac{R}{r}=\frac{5}{2}$ bekommt man das nebenstehende Bild.

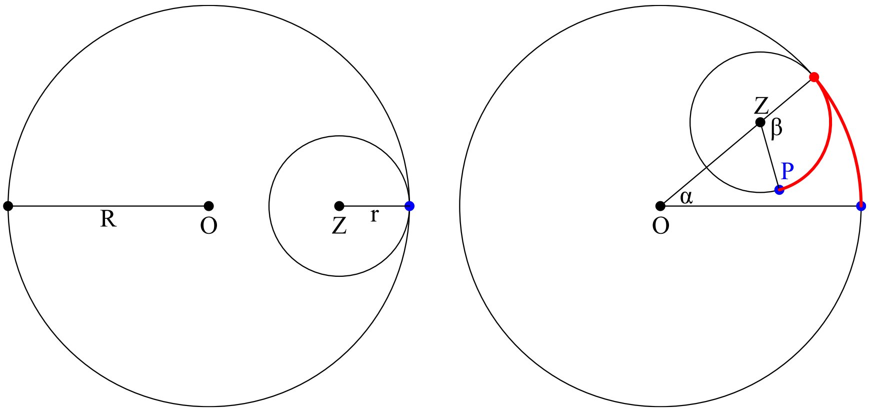


R muss nicht größer sein als r. Für $R=\frac{r}{2}$ bekommt man mit $\beta=\frac{\alpha}{2}$ nebenstehende Kurve.



Hypozykloiden

Ein Kreis (Radius r) rollt auf einem anderen Kreis (Radius R) innen ab. Was wird aus dem blauen Berührpunkt (links)?



Aus dem ursprünglichen Berührpunkt ist ein blauer Punkt P (rechts) geworden, der auf dem festen Kreis einen Bogen mit Mittelpunktswinkel α und auf dem beweglichen Kreis einen gleich langen Bogen mit dem Mittelpunktswinkel β zurückgelegt hat.

Wegen $2\cdot\pi\cdot R\cdot\frac{\alpha}{360°}=2\cdot\pi\cdot r\cdot\frac{\beta}{360°}$ ist $\beta=\frac{R}{r}\cdot\alpha$.

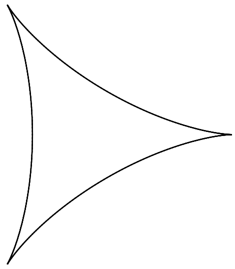
Der alte blaue Berührpunkt P hat nun die Form

$$P=Z+r\cdot\begin{pmatrix}\cos(\alpha-\beta)\\ \sin(\alpha-\beta)\end{pmatrix}=(R-r)\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}\cos(\alpha-\beta)\\ \sin(\alpha-\beta)\end{pmatrix}.$$

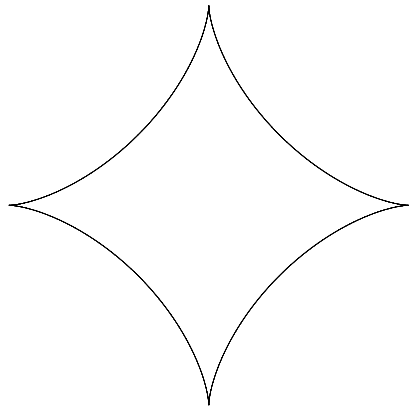
Für $R=r$ bekommt man kein sinnvolles Resultat.

Für $R=2\cdot r$ ist $P=r\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}\cos(-\alpha)\\ \sin(-\alpha)\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}2\cdot\cos\alpha\\ 0\end{pmatrix}$ der allgemeine Punkt einer Strecke. Damit gelingt die Transformation einer Kreisbewegung in eine geradlinige.

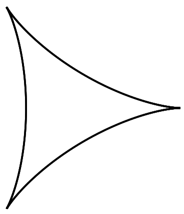
Für $R=3\cdot r$ ist $P=2\cdot r\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}\cos(-2\cdot\alpha)\\ \sin(-2\cdot\alpha)\end{pmatrix}$ der allgemeine Punkt einer Deltoide.

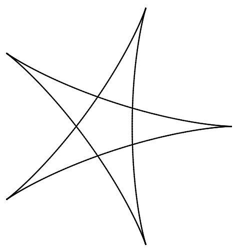


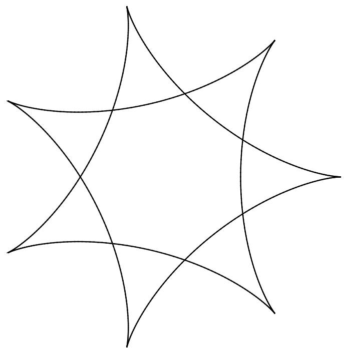
Für $R=4\cdot r$ ist $P=3\cdot r\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}\cos(-3\cdot\alpha)\\ \sin(-3\cdot\alpha)\end{pmatrix}$ der allgemeine Punkt einer Astroide.



R/r muss nicht ganzzahlig sein. Für $\frac{R}{r}=\frac{3}{2}$, $\frac{R}{r}=\frac{5}{2}$, $\frac{R}{r}=\frac{7}{2}$ bekommt man die nebenstehenden Bilder.







Vergleich

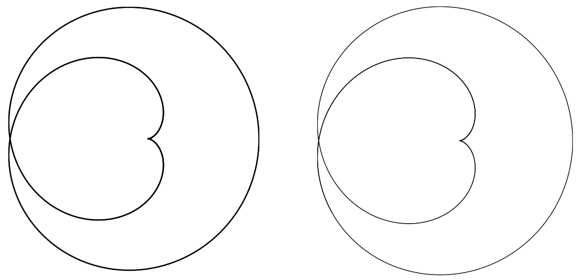
Mit $n=\frac{R}{r}=\frac{\beta}{\alpha}$ und $m=1+n$ sowie $k=1-n$ ist der allgemeine Punkt einer Epizykloide

$$E(\alpha)=r\cdot m\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}-r\cdot\begin{pmatrix}\cos(m\cdot\alpha)\\ \sin(m\cdot\alpha)\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}m\cdot\cos\alpha-\cos(m\cdot\alpha)\\ m\cdot\sin\alpha-\sin(m\cdot\alpha)\end{pmatrix}$$

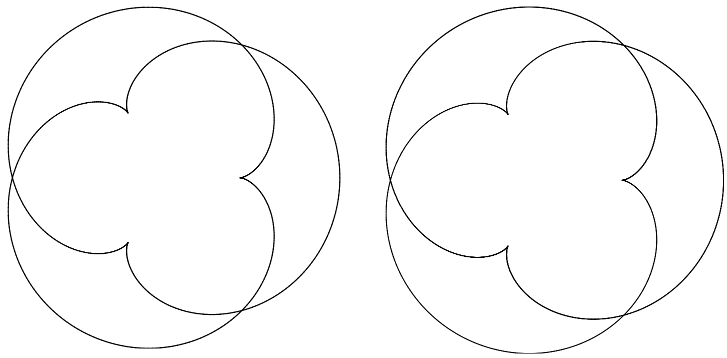
und der allgemeine Punkt einer Hypozykloide

$$H(\alpha)=-k\cdot r\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}\cos(k\cdot\alpha)\\ \sin(k\cdot\alpha)\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}-k\cdot\cos\alpha+\cos(k\cdot\alpha)\\ -k\cdot\sin\alpha+\sin(k\cdot\alpha)\end{pmatrix}.$$

In der Mitte sieht man die Epizykloide für $\frac{R}{r}=\frac{1}{2}$, also $m=\frac{3}{2}$.
Rechts sieht man die Hypozykloide für $\frac{R}{r}=\frac{1}{3}$, also $k=\frac{2}{3}$.



In der Mitte sieht man die Epizykloide für $\frac{R}{r}=\frac{3}{2}$, also $m=\frac{5}{2}$.
Rechts sieht man die Hypozykloide für $\frac{R}{r}=\frac{3}{5}$, also $k=\frac{2}{5}$.



Vermutlich haben Epi- und Hypo-Zykloiden miteinander zu tun?

Für $m=\frac{u}{v}$ ist $E_{u/v}(\alpha)=r\cdot\begin{pmatrix}\frac{u}{v}\cdot\cos\alpha-\cos\left(\frac{u}{v}\cdot\alpha\right)\\ \frac{u}{v}\cdot\sin\alpha-\sin\left(\frac{u}{v}\cdot\alpha\right)\end{pmatrix}=\frac{r}{v}\cdot\begin{pmatrix}u\cdot\cos\left(v\cdot\frac{\alpha}{v}\right)-v\cdot\cos\left(u\cdot\frac{\alpha}{v}\right)\\ u\cdot\sin\left(v\cdot\frac{\alpha}{v}\right)-v\cdot\sin\left(u\cdot\frac{\alpha}{v}\right)\end{pmatrix}$,

und für $k=\frac{v}{u}$ ist $H_{v/u}(180^\circ+\alpha)=r\cdot\begin{pmatrix}\frac{v}{u}\cdot\cos\alpha-\cos\left(\frac{v}{u}\cdot\alpha\right)\\ \frac{v}{u}\cdot\sin\alpha-\sin\left(\frac{v}{u}\cdot\alpha\right)\end{pmatrix}=-\frac{r}{u}\cdot\begin{pmatrix}u\cdot\cos\left(v\cdot\frac{\alpha}{u}\right)-v\cdot\cos\left(u\cdot\frac{\alpha}{u}\right)\\ u\cdot\sin\left(v\cdot\frac{\alpha}{u}\right)-v\cdot\sin\left(u\cdot\frac{\alpha}{u}\right)\end{pmatrix}$.

Es folgt: Eine Hypozykloide ist eine Epizykloide ist eine Hypozykloide ist eine …