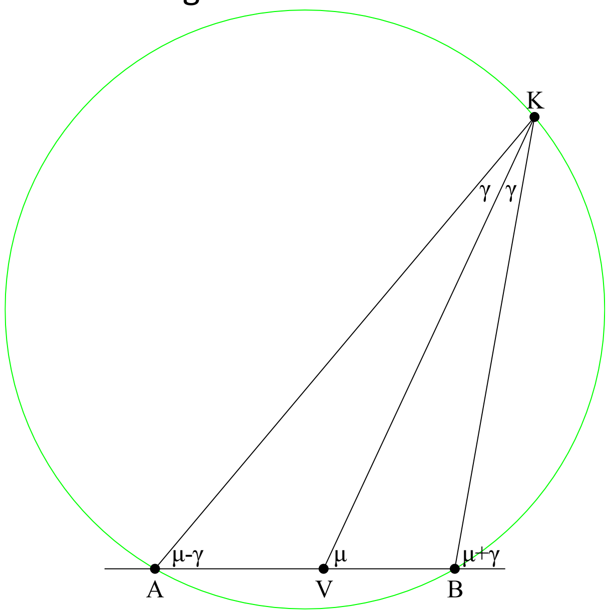
Jörg MEYER, Hameln
28.1.2021/10.4.2021

Zwei Leuchttürme

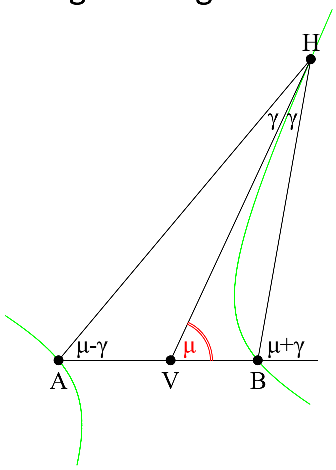
I. Gleichsinniges Drehen führt zu einem Kreis



Zwei Leuchttürme A und M senden Strahlen aus, die sich mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit gleichsinnig drehen. Der Winkel μ ändert sich ständig. Zu einem gewissen Zeitpunkt treffen sich beide Strahlen in K. Da die *Differenz* $2\cdot\gamma$ der Winkel mit der Rechtsachse *konstant* bleibt, liegen nach dem Umfangswinkelsatz alle Schnittpunkte K auf einem Kreis durch A und B, dessen Größe durch μ bestimmt ist.

In der Figur ist die Winkelhalbierende KV sachlich überflüssig, sie soll nur den Kontrast zum folgenden Fall verdeutlichen.

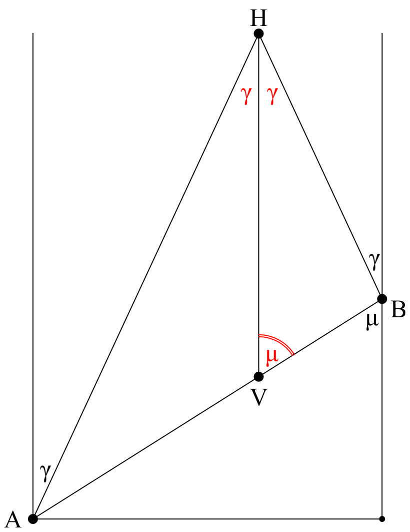
II. Gegensinniges Drehen führt zu einer rechtwinkligen Hyperbel



Drehen sich beide Strahlen gegensinnig, aber mit der gleichen absoluten Winkelgeschwindigkeit, so ist die *Summe* $2\cdot\mu$ der Winkel mit der Rechtsachse *konstant*. Es muss μ von 0° verschieden sein (sonst erhielte man eine Gerade). Der Winkel γ ändert sich ständig. Zu einem gewissen Zeitpunkt treffen sich beide Strahlen in H.
In der Figur ist HV die Winkelhalbierende. Es fällt auf, dass der Winkel bei V von γ unabhängig ist.
Zur weiteren Untersuchung ist es hilfreich, die Anordnung so zu drehen, dass VH vertikal verläuft.

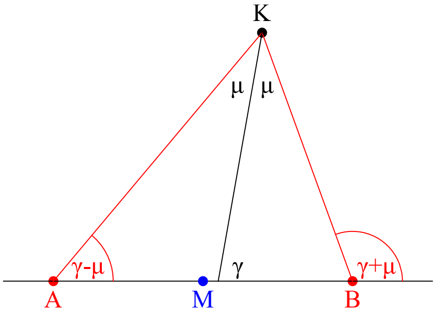
Gegeben sind zwei Punkte A und B und damit μ als Komplementärwinkel von AB zur Horizontalen. Setzt man $A=\begin{pmatrix}-1\\-m\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ mit $m=\cot\mu$, so hat der von A ausgehende Strahl die Gleichung $y=c\cdot(x+1)-m$ und der von B ausgehende Strahl die Gleichung $y=-c\cdot(x-1)+m$ mit $c=\cot\gamma$. Beide Strahlen schneiden einander in $H(c)=\begin{pmatrix}m/c\\c\end{pmatrix}$.

Man hat also eine *rechtwinklige Hyperbel* durch $H(-m)=A$ und $H(m)=B$ und mit dem Mittelpunkt $\frac{A+B}{2}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.



III. Synopse

Im folgenden Bild entsteht links ein Kreis um M und rechts eine Hyperbel mit dem Mittelpunkt M.

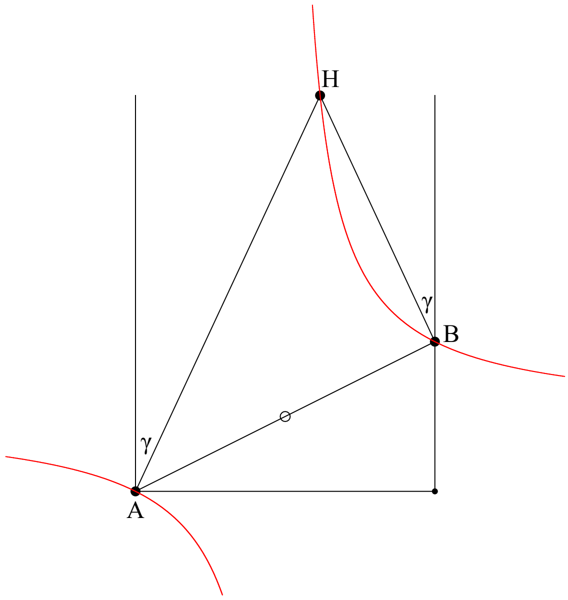


γ variabel, μ konstant

M = (A+B)/2

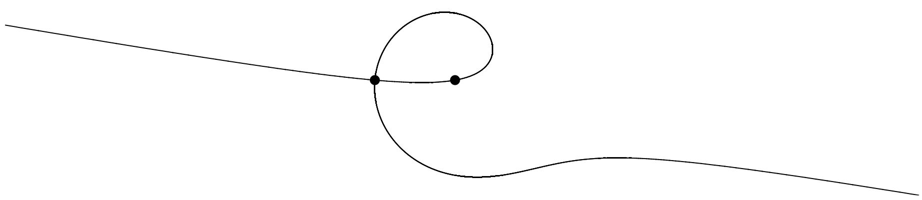
IV. Verallgemeinerung

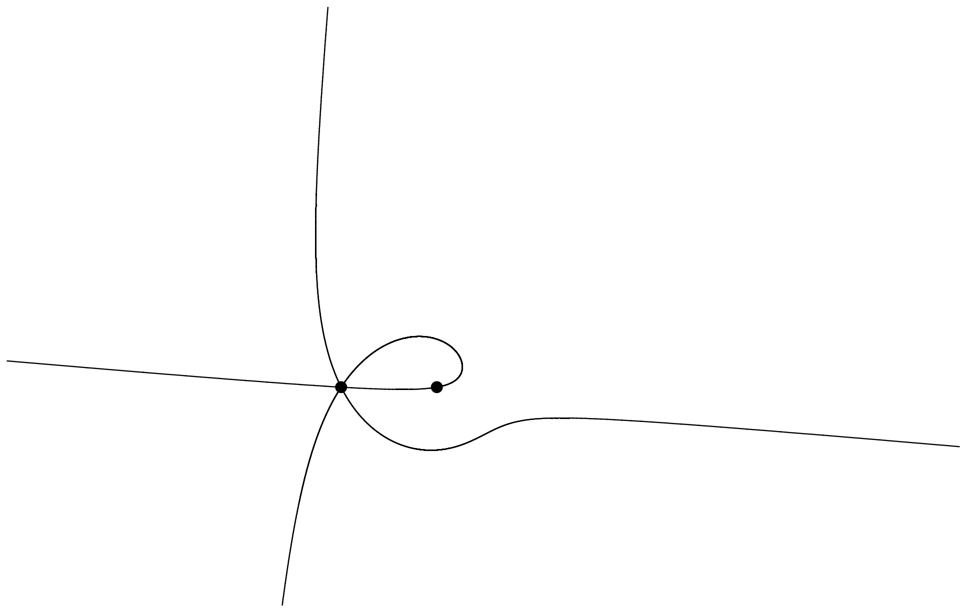
Allgemeiner gilt: Gegeben seien zwei zum Ursprung symmetrische Punkte $A = \begin{pmatrix} -u \\ -v \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Dann hat der von A ausgehende Strahl die Gleichung $y = c \cdot (x+u) - v$ und der von B ausgehende Strahl die Gleichung $y = -c \cdot (x-u) + v$ mit $c = \cot\gamma$. Beide Strahlen schneiden einander in $H(c) = \begin{pmatrix} v/c \\ c \cdot u \end{pmatrix}$. Man hat also eine *rechtwinklige Hyperbel* mit $x \cdot y = u \cdot v$ mit $H\left(\frac{v}{u}\right) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = B$ und $H\left(-\frac{v}{u}\right) = \begin{pmatrix} -u \\ -v \end{pmatrix} = A$.

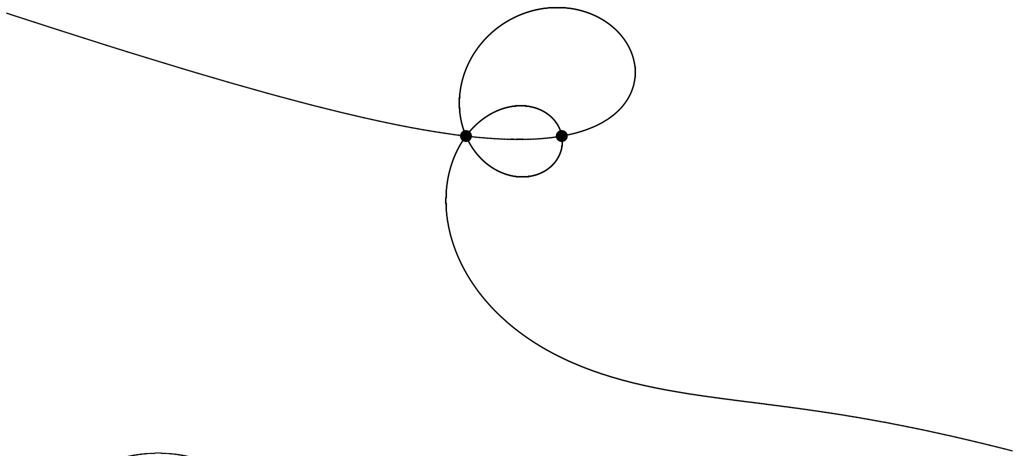


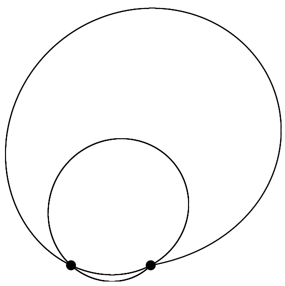
V. Man braucht hier nicht aufzuhören

Die Kurven werden komplizierter und sind auch keine Kegelschnitte mehr, wenn die absoluten Winkelgeschwindigkeiten nicht mehr gleich sind. Die folgenden Bilder zeigen Teile der Kurven, wenn sich die gleichsinnigen Winkelgeschwindigkeiten verhalten wie 1:2, 1:3 und 2:3.

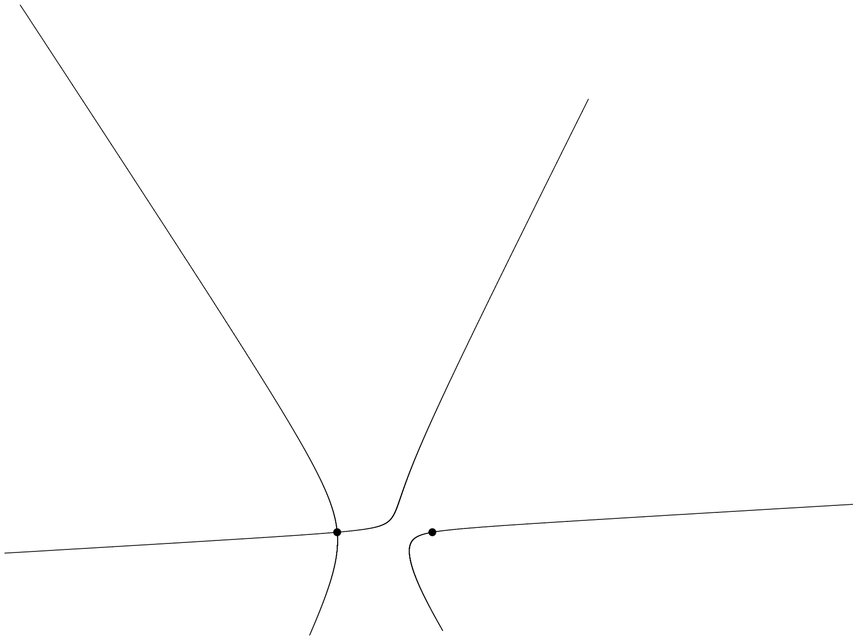








Links sieht man, welche Kurve sich ergibt, wenn sich die (gleichsinnigen) Winkelgeschwindigkeiten verhalten wie 1:1,1 (zu A gehört der Winkel σ, zu B der Winkel $1{,}1 \cdot \sigma + 10^\circ$).



Die zu gegensinnigen Winkelgeschwindigkeiten gehörigen Kurven sind noch etwas bizarrer als die letzten vier Kurven. Links gehört zu A der Winkel σ, zu B der Winkel $-2\cdot\sigma+10°$).