Jörg MEYER, Hameln

September 2023

Zwei Kennzeichnungen von Ellipse und Hyperbel

Einleitung

Es bezeichne PQ den Abstand zwischen den Punkten P und Q, und es bezeichne gP den Abstand zwischen dem Punkt P und der Geraden g.

A. Mit den beiden Brennpunkten F und F' sind die Ellipsenpunkte E durch die Beziehung

$$FE + F'E = 2 \cdot a$$

charakterisiert.

B. Mit dem Brennpunkt F und der Leitgeraden g sind die Ellipsenpunkte E durch die Beziehung

$$FE = \varepsilon \cdot gE$$

mit $0 < \varepsilon < 1$ charakterisiert.

Analog gilt:

C. Mit den beiden Brennpunkten F und F' sind die Hyperbelpunkte H durch die Beziehung

$$FH - F'H = \pm 2 \cdot a$$

charakterisiert.

D. Mit dem Brennpunkt F und der Leitgeraden g sind die Hyperbelpunkte H durch die Beziehung

$$FH = \varepsilon \cdot gH$$

mit $1 < \varepsilon$ charakterisiert.

Hier geht es um die Äquivalenzen $A \Leftrightarrow B$ und $C \Leftrightarrow D$.

Von A nach B

Mit den beiden Brennpunkten $F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$, $F' = \begin{pmatrix} -f \\ 0 \end{pmatrix}$ sind die Ellipsenpunkte $E = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ durch die Beziehung

$$FE + F'E = 2 \cdot a$$

charakterisiert. Es ist

$$FE^2 = (u-f)^2 + v^2 \text{ und } F'E^2 = (u+f)^2 + v^2,$$

also

$$F'E^2 - FE^2 = 4 \cdot u \cdot f$$

und deshalb

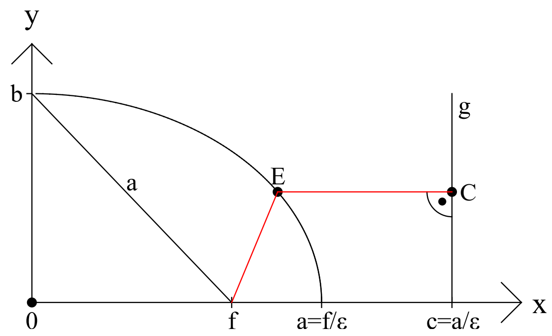
$$F'E - FE = \frac{F'E^2 - FE^2}{F'E + FE} = \frac{4 \cdot u \cdot f}{2 \cdot a} = \frac{2 \cdot u \cdot f}{a},$$

was zusammen mit $FE + F'E = 2 \cdot a$ auf $FE = a - \frac{u \cdot f}{a} = \frac{f}{a} \cdot \left(\frac{a^2}{f} - u \right) = \frac{f}{a} \cdot gE$ mit $\boxed{g:\ x = \frac{a^2}{f} =: c}$ führt.

Für jeden Ellipsenpunkt E gilt daher $\boxed{FE = \varepsilon \cdot gE}$ mit $\boxed{\varepsilon = \frac{f}{a}}$.

Nebenbei: Wegen $\varepsilon = \frac{f}{a}$ und $c = \frac{a^2}{f} = \frac{a}{\varepsilon}$ hat man die geometrische Folge

$$\boxed{f,\ a = \frac{f}{\varepsilon},\ c = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{f}{\varepsilon^2}}\ .$$



Von C nach D

Im Folgenden sei $\delta = 1$, falls es sich um den zu F gehörigen Hyperbelast handelt und anderenfalls $\delta = -1$.

Mit den beiden Brennpunkten $F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$, $F' = \begin{pmatrix} -f \\ 0 \end{pmatrix}$ sind die Hyperbelpunkte $H = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ durch die Beziehung

$$F'H - FH = \delta \cdot 2 \cdot a$$

Es ist

$$FH^2 = (u-f)^2 + v^2 \text{ und } F'H^2 = (u+f)^2 + v^2\,,$$

also

$$F'H^2 - FH^2 = 4 \cdot u \cdot f$$

und deshalb

$$F'H + FH = \frac{F'H^2 - FH^2}{F'H - FH} = \frac{4 \cdot u \cdot f}{\delta \cdot 2 \cdot a} = \delta \cdot \frac{2 \cdot u \cdot f}{a}\,,$$

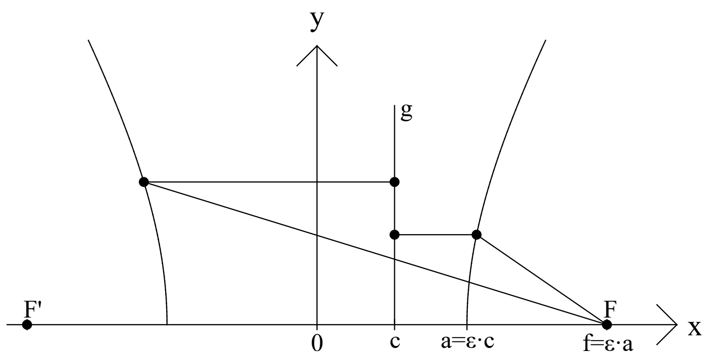
was zusammen mit $F'H - FH = \delta \cdot 2 \cdot a$ auf $FH = \delta \cdot \left(\frac{u \cdot f}{a} - a \right) = \delta \cdot \frac{f}{a} \cdot \left(u - \frac{a^2}{f} \right) = \frac{f}{a} \cdot gH$ mit $\boxed{g:\ x = \frac{a^2}{f} =: c}$

führt (man beachte, dass für Punkte auf dem zu F‘ gehörigen Ast die Differenz $u - \frac{a^2}{f}$ negativ ist).

Für jeden Hyperbelpunkt H gilt daher $\boxed{FH = \varepsilon \cdot gH}$ mit $\boxed{\varepsilon = \frac{f}{a}}$.

Wieder hat man eine geometrische Folge

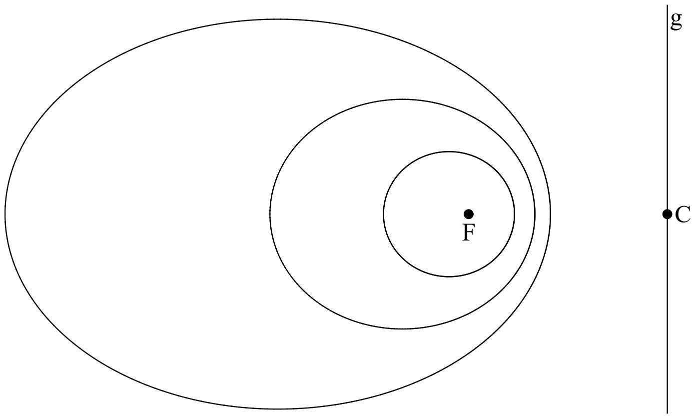
$$\boxed{c,\ a = \varepsilon \cdot c,\ f = \varepsilon \cdot a = \varepsilon^2 \cdot c}\ .$$



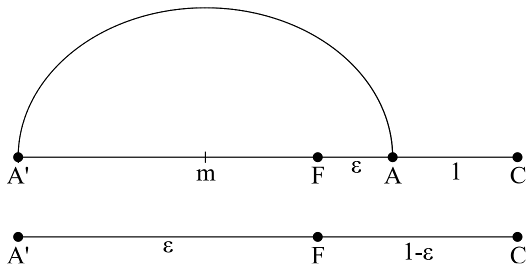
Von B nach A

Nun sei umgekehrt der Ellipsenpunkt $E = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ charakterisiert durch $\boxed{FE = \varepsilon \cdot gE}$ mit $0 < \varepsilon < 1$.

Man wähle das Koordinatensystem so, dass $F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$ und $g:\ x = c$ gilt. $C = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ ist der Fußpunkt von F auf g. Rechts sieht man Ellipsen für verschiedene Werte von $0 < \varepsilon < 1$.



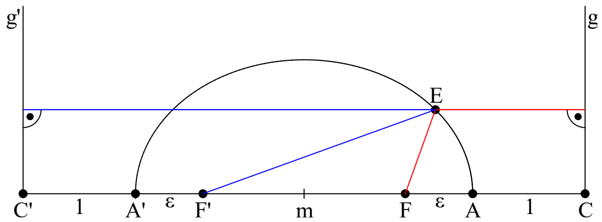
Die beiden Scheitelpunkte $A = \frac{F + \varepsilon \cdot C}{1 + \varepsilon} =: \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ und $A' = \frac{F - \varepsilon \cdot C}{1 - \varepsilon} =: \begin{pmatrix} a' \\ 0 \end{pmatrix}$ liegen auf der Ellipse.



Aus $FE = \varepsilon \cdot gE$ folgt $(u-f)^2 + v^2 = \varepsilon^2 \cdot (c-u)^2$ bzw. $\boxed{(u-m)^2 + \frac{v^2}{1-\varepsilon^2} = \varepsilon^2 \cdot \frac{(f-c)^2}{\left(1-\varepsilon^2\right)^2}}$ mit der Hilfsgröße $m = \frac{f - \varepsilon^2 \cdot c}{1 - \varepsilon^2} = \frac{a + a'}{2}$. Die Gleichung ist wegen $0 < \varepsilon < 1$ eine Ellipsengleichung. Zu erkennen ist die Symmetrie zu $u = m$. Die Nullstellen sind erwartungsgemäß a und a'.

Aufgrund der Symmetrie zu $u = m$ gibt es einen zweiten Brennpunkt $F' = \begin{pmatrix} 2 \cdot m - f \\ 0 \end{pmatrix}$ und eine zweite Leitgerade $g':\ x = 2 \cdot m - c$.

Dann ist



$$FE + F'E = \varepsilon \cdot (gE + g'E) = \varepsilon \cdot C'C = \varepsilon \cdot (gA + g'A) = FA + F'A = F'A' + F'A = A'A.$$

Von D nach C

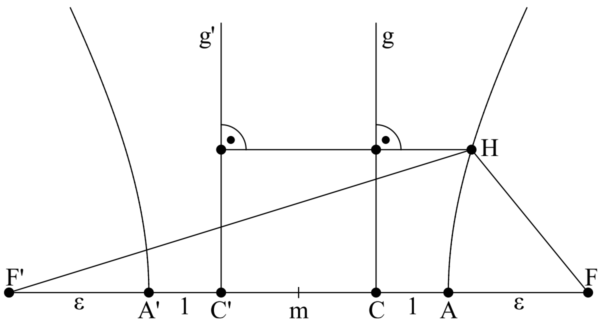
Es gibt die beiden Hyperbelpunkte $A = \frac{F + \varepsilon \cdot C}{1 + \varepsilon} =: \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ und $A' = \frac{F - \varepsilon \cdot C}{1 - \varepsilon} =: \begin{pmatrix} a' \\ 0 \end{pmatrix}$. Wie bei der Ellipse folgt aus $FH = \varepsilon \cdot gH$, $F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$ und $g:\ x = c$ mit $m = \frac{a + a'}{2}$ die Gleichung

$$\boxed{(u-m)^2+\frac{v^2}{1-\varepsilon^2}=\varepsilon^2\cdot\frac{(f-c)^2}{\left(1-\varepsilon^2\right)^2}}\ .$$

Wegen $\varepsilon>1$ handelt es sich um eine Hyperbelgleichung mit den Nullstellen a und a‘.

Aufgrund der Symmetrie zu $u=m$ gibt es einen zweiten Brennpunkt $F'=\begin{pmatrix}2\cdot m-f\\0\end{pmatrix}$ und eine zweite Leitgerade $g':\ x=2\cdot m-c$.

Dann ist



$$F'H-FH=\varepsilon\cdot(g'H-gH)=\varepsilon\cdot C'C=\varepsilon\cdot(g'A-gA)=F'A-FA=A'A\ .$$

Für Hyperbelpunkte auf dem zu F‘ gehörigen Ast argumentiert man analog.