

Jörg MEYER, Hameln  
12. 9. 2022

## Zu den Aporien des ZENON von Elea

Jeder kennt die Geschichte mit Achill und der Schildkröte. Aber ist das heute noch interessant? Häufiger hört man die Ansicht, das sei doch alles längst überholt, und ZENON hätte nur die geometrische Reihe falsch summiert. Es sei unverständlich, dass man sich mehr als 2000 Jahre noch Zenon noch mit diesen Lächerlichkeiten befasse.

In der Philosophie war ZENON wirkungsmächtig. Hegel<sup>1</sup> schreibt sogar: „Kants Antinomien sind nichts weiter, als was ZENON hier schon getan hat“.

Aber Philosophen sind (oftmals) keine Mathematiker. Zur Mathematik schreibt Felgner<sup>2</sup>: „Für die Geschichte der Mathematik ist die Diskussion der ZENON'schen Paradoxien im Altertum, in der Scholastik und in der Neuzeit auch deshalb von großer Bedeutung, weil sie mit dazu beigetragen hat, den Begriff des Kontinuums (und damit den Begriff der reellen Zahl) zu klären.“

Und nicht nur der reellen Zahl, sondern auch des Grenzwerts. Die Geschichte ist etwa bei Cajori<sup>3</sup> nachlesbar (im Netz frei verfügbar).

Das eindimensionale Kontinuum hat mit der geraden Linie zu tun. Dazu bemerkt Sonar<sup>4</sup>: „Sicher ist, dass die Frage nach dem Aufbau einer geraden Linie am Ursprung der Entwicklung der Analysis liegt und alle Forscher über Newton, Leibniz und deren Nachfolger beeinflusst hat. Fragen wie diese haben Denker bis in unsere Tage hinein fasziniert.“

### Wer war ZENON von Elea (ca. 490 – ca. 430 v. Chr.)?

Er war Schüler von PARMENIDES (ca. 520 – ca. 460 v. Chr. Geb.), der vor allem durch seinen (vielfältig deutbaren) Satz<sup>5</sup> „Dasselbe ist Erkennen und Sein“ bekannt ist. Etwas ist nur, indem ich es denkerisch erfassen kann. Man kann darin das Programm des abendländischen Logozentrismus sehen. „Man hat sich nicht mit der sinnlichen Gewissheit zu begnügen, sondern zu begreifen“<sup>6</sup> Aber darin liegt das Problem: Lässt sich jede sinnliche Gewissheit begreifen? „Was die Schwierigkeit macht, ist immer das Denken, weil es die in der Wirklichkeit verknüpften Momente eines Gegenstands in ihrer Unterscheidung auseinanderhält.“<sup>7</sup>

Von ZENON selber ist nichts erhalten; man kennt ihn vor allem durch seine (leider recht knappe) Erwähnung in der *Physik* des ARISTOTELES<sup>8</sup>.

---

<sup>1</sup> G. W. F. Hegel: Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie, Band 1. stw, S. 317.

<sup>2</sup> U. Felgner (2020): Philosophie der Mathematik in der Antike und in der Neuzeit. Birkhäuser, S. 91.

<sup>3</sup> F. Cajori: The History of Zeno's Arguments on Motion: Phases in the Development of the Theory of Limits. In: American Mathematical Monthly 1915, verteilt auf die Hefte Januar bis November.

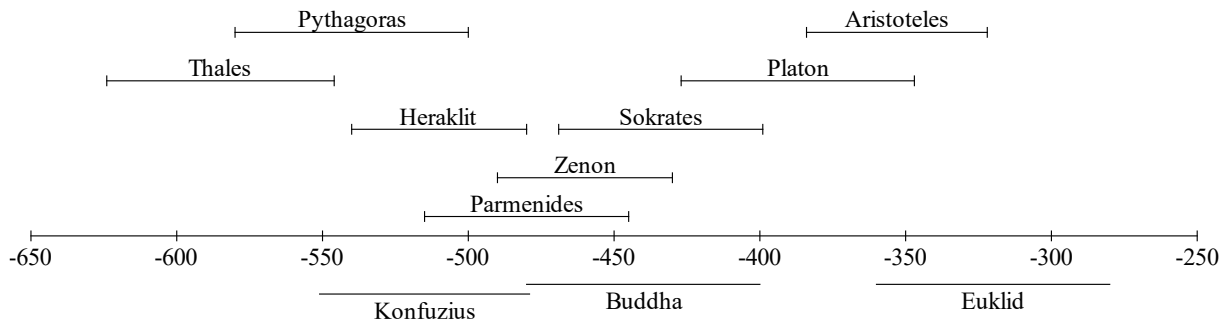
<sup>4</sup> Th Sonar (2011): 3000 Jahre Analysis. Springer, S. 58 und 51.

<sup>5</sup> Parmenides: Fragmente (Übersetzung: Heitsch). Tusculum, Fragment B3.

<sup>6</sup> Hegel, loc. cit., S. 306.

<sup>7</sup> Hegel, loc. cit., S. 314.

<sup>8</sup> Aristoteles: Physikalische Vorlesung (Übersetzung: Gohlke). Schöningh, S. 215 f.; VI.9; .239b.



## Abwandlung von Achill/Schildkröte

Wandelt man die Achill-Schildkröte-Geschichte so ab, dass die Schildkröte sich gar nicht bewegt, so „beweist“ Zenon, dass niemand eine Strecke  $O_1$  von der Stelle 0 zur Stelle 1 durchlaufen kann, denn er muss ja zunächst die erste Hälfte des Weges zurücklegen, dann von der verbleibenden Hälfte wieder die Hälfte, dann von dem verbleibenden Viertel des Gesamtweges wieder die Hälfte und so weiter. Kurzum: *Er kommt niemals an.*

Man kann die Sache auch anders sehen: Zunächst müsste er die erste Hälfte des Weges zurücklegen; und um das zu vollbringen, müsste er aber die erste Hälfte der ersten Hälfte zurücklegen, dazu aber die erste Hälfte des ersten Viertels des Gesamtweges und so weiter. Kurzum: *Er kann gar nicht starten.*

Hier sind weitere Variationen denkbar: Er muss erst die erste Hälfte des Gesamtweges zurücklegen, davor aber das erste Drittel des Gesamtweges, davor aber das erste Viertel und so weiter. Auch auf diese Weise kann er gar nicht starten. Auch diese Variation lässt sich umdrehen: Zunächst verbleibt die letzte Hälfte des Gesamtweges, dann verbleibt das letzte Drittel des Gesamtweges und so weiter, er kommt somit niemals an, weil er ja alle Zwischenpunkte passieren muss.

Natürlich war ZENON klar, dass man ohne Schwierigkeiten von 0 nach 1 gelangen kann, dass also die Unendlichkeit in einen begrenzten Zeitrahmen passt. Das Problem liegt anders: Wo genau steckt der Fehler in Zenons Argumentation?

Egal, welche Version der ZENON'schen Aporie<sup>9</sup> man nimmt: Stets wird eine Strecke (etwa die von 0 zur 1) in unendlich viele Teilstrecken geteilt. Wenn man den Teilungsvorgang zu Ende führen würde, gelangte man zu Teilstrecken der Länge 0, also zu Punkten. Diese können irgendwo auf der Strecke sein. Da kein Punkt gegenüber den anderen ausgezeichnet ist, kann man vermuten, dass die Strecke aus Teilstrecken der Länge 0 besteht. Dann ist aber völlig unklar, wie aus Teilstrecken der Länge 0 eine Strecke mit der Länge 1 entstehen kann. Dies führt zu einer interessanten Frage:

## Woraus besteht eine Strecke?

Die folgenden Überlegungen sind nicht physikalischer Natur (eine physikalische Strecke besteht nicht aus ausdehnungslosen Punkten), sondern rein mathematischer Natur. Es gibt offenbar zwei Möglichkeiten:

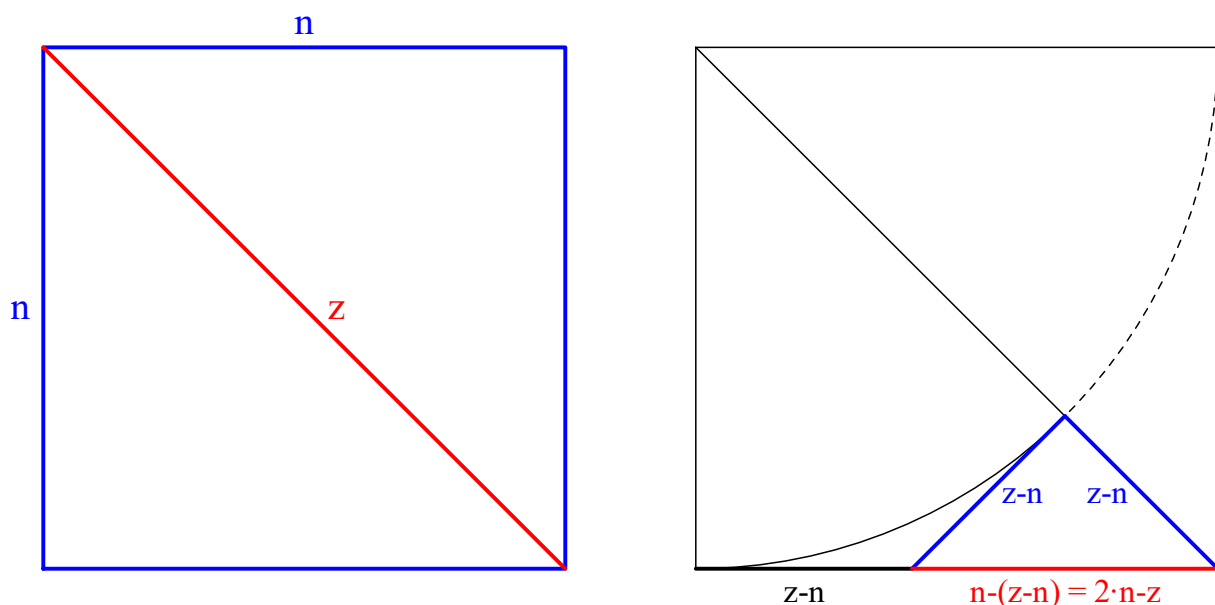
- Eine Strecke besteht aus Teilstrecken, die eine gewisse Länge haben, die größer ist als 0, oder
- sie besteht aus Teilstrecken, die die Länge 0 haben.

<sup>9</sup> Von einer Aporie spricht man, wenn das Denken in eine offenbar ausweglose Lage gerät.

Es ist sicher vernünftig, anzunehmen, dass die Teilstrecken alle gleichartig sind, also im ersten Fall alle die gleiche Länge  $e$  haben. Natürlich kann die Anzahl der Teilstrecken nicht unendlich groß sein, denn dann hätte die Gesamtstrecke eine unendliche Länge.

Betrachten wir den *ersten Fall* genauer: Jede Strecke hat dann eine Länge, die sich mit  $n \cdot e$  angeben lässt; hierbei ist  $n$  eine geeignete natürliche Zahl. Eine längere Strecke hat dann eine Länge  $z \cdot e$  mit einer passenden natürlichen Zahl  $z$ . Das Längenverhältnis beider Strecken ist  $z/n$ , kann also durch einen Bruch wiedergegeben werden.

Dass das zu Problemen führen kann, zeigt das folgende Beispiel, in dem ein Längenverhältnis auch durch einen Bruch mit echt kleinerem Zähler und echt kleinerem Nenner wiedergegeben werden kann. Dies könnte man fortsetzen, was jedoch absurd ist, denn dann würde man irgendwann den Nenner 0 bekommen.



Man kann also die Längen zweier beliebiger Strecken *nicht* im obigen Sinne durch  $n \cdot e$  und  $z \cdot e$  erfassen, und damit kann der erste Fall nicht eintreten.

Betrachten wir nun den *zweiten Fall* genauer: Eine Strecke (etwa die von 0 bis 1) besteht aus ausdehnungslosen Punkten, zu denen man durch Zerteilung kommt. Die Punkte entsprechen somit den Brüchen. Dann hat man aber das Problem, wie man Teilstrecken der Länge 0 zu einer Strecke der Länge 1 zusammenkleben kann. Man kann beweisen: Wenn es zu jedem Bruch einen Punkt gibt und wenn man alle diese (abzählbar vielen) Punkte zusammenklebt, dann bekommt man eine Teilstrecke der Länge 0, also überhaupt nicht das, was man haben will.

Offensichtlich muss es weitere Punkte auf der Ausgangsstrecke geben, die sich nicht durch einen Bruch beschreiben lassen, und davon muss es sogar sehr, sehr viele geben! Das ist tatsächlich so; Georg CANTOR (1845 – 1918) hat beweisen können, dass die Menge der Zahlen zwischen 0 und 1, die sich nicht durch einen Bruch beschreiben lassen (die irrationalen Zahlen wie z.B.  $\sqrt{2}$ ), in einem wohldefinierten Sinne viel mächtiger ist als die Menge der Bruchzahlen. Die Mächtigkeit der Bruchzahlen ist *abzählbar unendlich*, die aller reellen Zahlen ist *überabzählbar unendlich*.

Wir haben die irrationalen Zahlen verwendet, um den ersten Fall ad absurdum zu führen; und wir benötigen die Tatsache, dass sie eine übergroße Menge bilden, um den zweiten Fall zu etablieren.

Von ZENON ZU CAVALIERI

Die Frage, was eine Strecke sei, ist keine isolierte Frage. Auch wenn man sich überlegt, wie man (krumrandig begrenzte) Flächen- oder Rauminhalte berechnen soll, wird man auf das Problem geführt, inwiefern die heuristisch fruchtbare Vorstellung, eine Fläche sich aus „unendlich dünnen“ Linien oder einen Körper sich aus „unendlich dünnen“ Scheiben vorzustellen, also mit den sogenannten Indivisiblen zu arbeiten, argumentativ haltbar ist. Immerhin lässt sich das aus der Schule bekannte Prinzip von Bonaventura CAVALIERI (1598 – 1647) mathematisch streng beweisen. Das Prinzip sagt aus: Zwei Körper sind volumengleich, wenn alle ihre Schnittflächen in Ebenen parallel zu einer Grundebene in entsprechenden Höhen flächeninhaltsgleich sind.

CAVALIERI hat übrigens (nach Boyer<sup>10</sup>) nirgendwo erklärt, was er sich genau unter den Indivisiblen vorstellte, aber gleichwohl fruchtbar mit ihnen gearbeitet. Die Haltung, mit unverstandenen Objekten zu arbeiten, ist typisch für die Analysis bis ins 19. Jahrhundert hinein.

## Zum Sinn der ZENON'schen Aporien

Man kann den Sinn der ZENON'schen Aporien darin sehen, dass die Unfähigkeit des menschlichen Verstandes, das zu erklären, was ihm die Sinne darbieten, deutlich werden soll. Colli<sup>11</sup> schreibt:

... que lo scopo di queste aporie sia la contestazione dell'incapacità della ragione umana di spiegare razionalmente quello che i sensi ci offrono.

Der Sinn dieser Aporien besteht darin, die Unfähigkeit des menschlichen Verstandes festzustellen, das zu erklären / zu verstehen, was uns die Sinne darbieten.

“Ogni tesi si conclude in Zenone con una confutazione, e il suo fine ultimo sarebbe quello di sviluppare una teoria totalmente negativa della ragione umana, di provare che ogni conoscenza viene distrutta dall'analisi razionale.”

„Jede Annahme in den Aporien endet in einer Verwirrung, deren Ziel darin besteht, eine rein negative Theorie / Sicht des menschlichen Verstandes zu entwickeln und zu zeigen, dass jegliche Gewissheit durch eine rationale Analyse zerstört werden kann.“

---

<sup>10</sup> C. B. Boyer [1949]: The History of the Calculus. 1959: Dover, S. 117.

<sup>11</sup> G. Colli [1964-65]: Zenone di Elea. 1998: Adelphi, S. 101, 147.