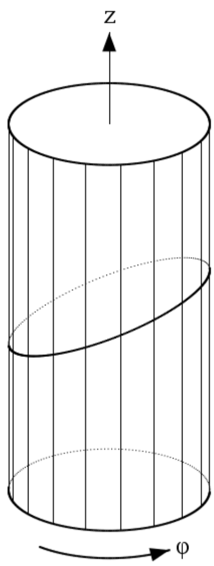
Jörg MEYER, Hameln

Zylinder-Schnitte

Schneidet man eine zylinderförmige Wurst schräg an, so ist die Schnittkurve eine Ellipse. Wickelt man die Pelle ab, so bekommt man einen Sinusbogen. Warum ist das so?



Der Zylinder habe die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$; z beliebig (die z-Achse ist also die Symmetrieachse des Zylinders) Die Schnitt-Ebene habe die Gleichung $z = m \cdot x$ mit $m = \tan\alpha$.

Im Zylindermantel (d.h. in der Pelle) sind die Geraden mit dem allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$ enthalten; ihr Schnitt mit der Ebene liefert den allgemeinen Punkt der Schnittkurve $\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ m \cdot \cos\varphi \end{pmatrix}$.

1. Warum entsteht beim Aufschneiden ein Sinusbogen?

Schneidet man den Zylinder parallel zu seiner Symmetrieachse auf, bekommt man ein Rechteck; die Schnittkurve hat nun den allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} \varphi \\ m \cdot \cos\varphi \end{pmatrix}$, ist also Teil einer <u>Sinuskurve</u> (und für $m = 0$ eine Strecke).

2. Warum ist die Schnittkurve eine Ellipse?

Zur Beantwortung ist es hilfreich, die Schnittebene und damit die Schnittkurve mithilfe der Matrix $M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$ in die Ebene mit $z = 0$ hineinzudrehen (die y-Achse ist also Drehachse). M bildet den allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ m \cdot x \end{pmatrix}$ der Schnitt-Ebene auf $\begin{pmatrix} x / \cos\alpha \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ ab und den allgemeinen

Punkt der Schnittkurve auf $\begin{pmatrix} \cos\varphi / \cos\alpha \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$. Man erkennt, dass es sich um einen mit dem Faktor $\frac{1}{\cos\alpha}$ gestreckten Kreis und damit um eine *Ellipse* handelt. Ist $\alpha = 0°$, bekommt man als Schnittkurve natürlich einen ungestreckten Kreis.

Literatur: Meyer, J.: Schnitte von Zylindern und Kegeln. In: Computeralgebra-Rundbrief **62** (März 2018), S. 27 -28.