Der verwirrte Passagier

Die Passagiere $P_1, P_2, \dots, P_n$ sollen sich auf die Plätze $S_1, S_2, \dots, S_n$ setzen, und zwar in dieser Reihenfolge.

P_1 hat das nicht verstanden und setzt sich irgendwohin. P_2 setzt sich auf S_2 , wenn das möglich ist, und sonst irgendwohin.

P_3 setzt sich auf S_3 , wenn das das möglich ist, und sonst irgendwohin. Usw.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann sich P_n auf S_n setzen?

Klar: Wenn sich P_2 gesetzt hat, ist S_2 belegt (von P_1 oder von P_2).

Wenn sich P_3 gesetzt hat, ist auch S_3 belegt (von P_1 oder von P_2 oder von P_3).

...

Wenn sich P_{n-1} gesetzt hat, sind alle Plätze $S_2, S_3, \dots, S_{n-1}$ belegt (egal, von wem).

Nun kommt P_n . Frei können nur die Plätze S_1 und S_n sein, die zu Beginn mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt worden waren. Also kann sich P_n mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auf S_n setzen.

Vorher kam P_{n-1} . Frei waren nur S_1, S_{n-1}, S_n , die zu Beginn mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt worden waren. Wenn S_{n-1} und S_n beide frei sind, kann sich P_{n-1} auf S_{n-1} setzen, also mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$.

Analog: P_{n-2} kann sich mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ auf S_{n-2} setzen.

P_{n-3} kann sich mit Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{5}$ auf S_{n-3} setzen.

P_{n-4} kann sich mit Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{6}$ auf S_{n-4} setzen

...

$P_3 = P_{n-(n-3)}$ kann sich mit Wahrscheinlichkeit $\frac{n-2}{n-1}$ auf S_3 setzen.

$P_2 = P_{n-(n-2)}$ kann sich mit Wahrscheinlichkeit $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ auf S_2 setzen.

Aufbau von vorne:

P_1 hat mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ sich auf S_2 gesetzt.

P_2 kann sich dann mit der Gegenwahrscheinlichkeit $1 - \frac{1}{n}$ auf S_2 setzen.

Nun kommt P_3 . Es sitzt P_1 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ auf S_3 . Oder es sitzt P_2 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$ darauf. Also kann sich P_3 mit der Gegenwahrscheinlichkeit $1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{n-2}{n-1}$ auf S_3 setzen.

Der Aufbau von vorn ist mühseliger.

Die Variation, dass nicht nur der erste, sondern auch der zweite Passagier verwirrt ist, baut man dann wohl besser von hinten auf.