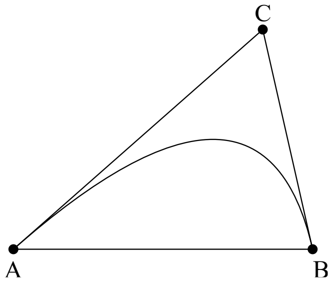
Jörg MEYER, Hameln

1. 9. 2021

Bézier-Kurven als Um-Parabeln

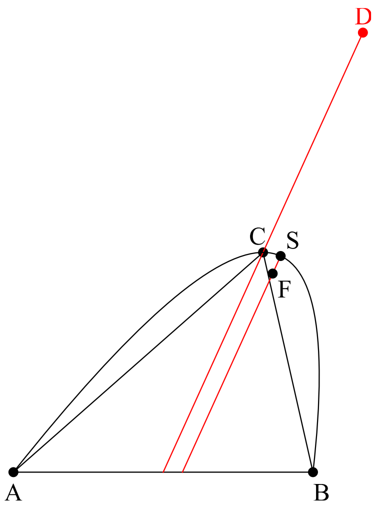


Quadratische Bézier-Kurven zu A, C, B berühren das Dreieck ABC in a in B und in b in A, gehen jedoch nicht durch C.

Diese Parabeln wurden schon von August ARTZT (1835 - 1899) untersucht und werden nach ihm benannt. Sie werden mitunter An-Parabeln genannt, obgleich sie gar nicht alle drei Seiten berühren.

Bézier-Kurven zu A, D, B haben den allgemeinen Punkt $X(t)=(1-t)^2\cdot A+2\cdot(1-t)\cdot t\cdot D+t^2\cdot B$.

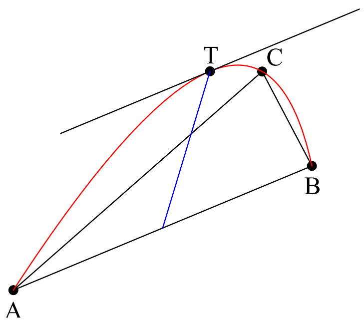
Wegen $X(0)=A$, $X(1)=B$ stellt sich die Frage, wie man D einrichten muss, damit $X\left(\frac{1}{2}\right)=C$ ist. Dabei ist die Wahl des Parameters $t=\frac{1}{2}$ willkürlich.



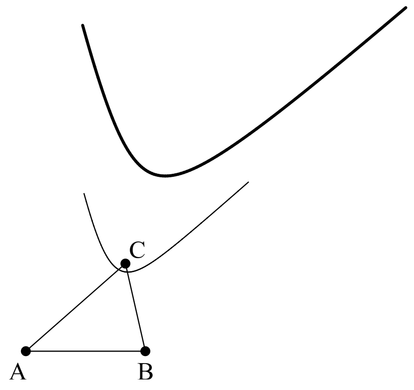
Es soll also $X\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\cdot A+\frac{1}{2}D+\frac{1}{4}\cdot B=C$ sein, was auf $\dfrac{D+\frac{A+B}{2}}{2}=C$ führt. C ist also der Mittelpunkt von D und dem Mittelpunkt von A und B, d.h. man bekommt D, wenn man den Mittelpunkt von A und B an C spiegelt.
In der Graphik ist auch die Parabelachse durch Scheitelpunkt S und Brennpunkt F eingetragen.
Die Tangente in C hat den Richtungsvektor $X'(t)\big|_{t=\frac{1}{2}}=2\cdot(t-1)\cdot A+2\cdot(1-2\cdot t)\cdot D+2\cdot t\cdot B\big|_{t=\frac{1}{2}}=-A+B$ und ist zu AB parallel.

Wählt man allgemein den Parameter $t=\tau$ und setzt man $1-\tau=\sigma$, so muss $X(\tau)=\sigma^2\cdot A+2\cdot\sigma\cdot\tau\cdot D+\tau^2\cdot B=C$ sein, was auf $D_\tau=\dfrac{C-\sigma^2\cdot A-\tau^2\cdot B}{2\cdot\sigma\cdot\tau}$ führt. Mit $s=1-t$ bekommt man den allgemeinen Kurvenpunkt $Q_\tau(t)=s^2\cdot A+2\cdot s\cdot t\cdot D_\tau+t^2\cdot B$.

Es ist $Q_\tau(0)=A$, $Q_\tau(1)=B$ und $Q_\tau(\tau)=C$.



Die Tangente in $T=Q_\tau\left(\frac{1}{2}\right)=\dfrac{\frac{A+B}{2}+D_\tau}{2}$ hat den Richtungsvektor $-2\cdot s\cdot A+2\cdot(1-2\cdot t)\cdot D_\tau+2\cdot t\cdot B\big|_{t=\frac{1}{2}}=-A+B$, ist also zu AB parallel. Die blaue Gerade durch T und den Mittelpunkt von AB ist als Gerade durch die Mittelpunkte zueinander paralleler Sehnen parallel zur Parabelachse.



Das nebenstehende Bild zeigt dick die Kurve der Punkte D und dünn die Kurve der zugehörigen Brennpunkte, wenn τ im Bereich von 0,15 bis 0,85 variiert wird.