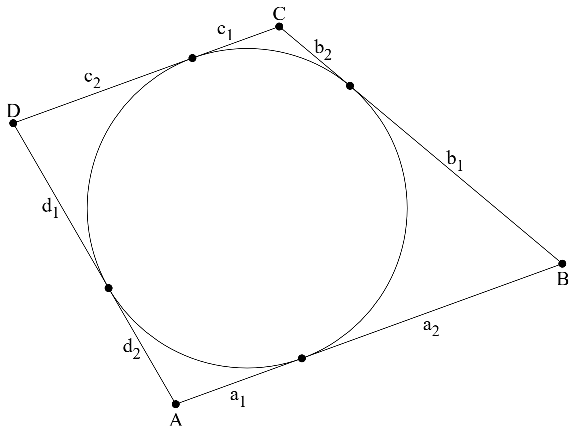
Dr. Jörg MEYER, Hameln

Tangenten-Vierecke

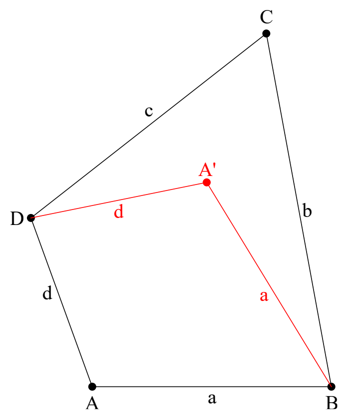
als Beispiel eines Problemlöseprozesses

Ein Viereck mit Inkreis heißt *Tangentenviereck*. Es ist unmittelbar zu sehen, dass wegen $a_1 = d_2$ usw. die Summe gegenüber liegender Seiten immer denselben Wert hat, dass also $a_1 + a_2 + c_1 + c_2 = b_1 + b_2 + d_1 + d_2$ ist.

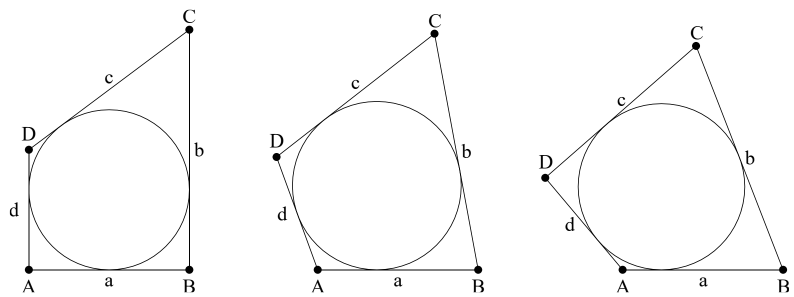


Gilt auch die Umkehrung? Besitzt ein Viereck, bei dem die Summe gegenüber liegender Seiten denselben Wert hat, einen Inkreis?
Für konvexe Vierecke ist die Antwort „ja“, ist jedoch etwas schwieriger einzusehen.

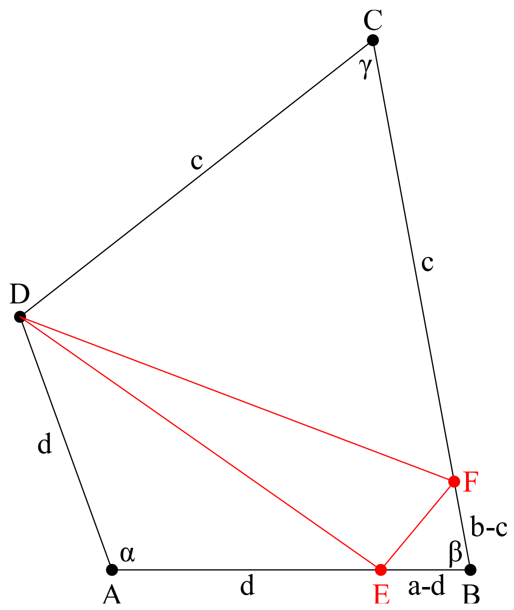
Vierecke, die nicht konvex sind, haben keinen Inkreis im üblichen sinne, d.h. einen Kreis, der die Seiten zwischen zwei Eckpunkten berührt.



Vorbemerkung: Ein konvexes Viereck ist durch die Angabe der vier Seiten nicht eindeutig bestimmt; man muss etwa den Winkel bei A vorgeben.



Wie beim Dreieck wird beim Viereck die Tatsache, ein Tangentenviereck zu sein, mit Winkelhalbierenden zu tun haben. Wenn sich die vier Winkelhalbierenden eines Vierecks in einem einzigen Punkt schneiden, so hat der denselben Abstand zu allen vier Seiten und ist mithin Mittelpunkt des Inkreises.
Ebenfalls analog zu der entsprechenden Eigenschaft beim Dreieck lässt sich beim Viereck zeigen: Wenn nur drei Winkelhalbierende durch einen Punkt gehen, so liegt dieser auch auf der vierten Winkelhalbierenden.



Nun kann man allgemein mit Winkelhalbierenden nicht gut umgehen. Es ist oft eine gute Idee, den Symmetriegehalt zu erhöhen und statt mit Winkelhalbierenden etwa mit Mittelsenkrechten zu argumentieren. So ist die Winkelhalbierende zu α die Mittelsenkrechte zu DE, und die Winkelhalbierende zum gegenüber liegenden Winkel γ ist Mittelsenkrechte zu DF. Die Punkte E und F können auch außerhalb der Vierecksseiten liegen.
Was hat man damit gewonnen? Die Aussage über Winkelhalbierende wurde übersetzt in eine Aussage über Mittelsenkrechten, und zwar zu den Strecken DE und DF. Nun liegt es nahe, auch die Mittelsenkrechte zu EF zu betrachten, die genau dann Winkelhalbierende zu β ist, wenn $a-d=b-c$ gilt.
Das aber ist die Summenbedingung. Da die Mittelsenkrechten des Dreiecks DEF durch einen Punkt gehen, tun es auch die Winkelhalbierenden zu α, β und γ, und das wiederum hat zur Folge, dass alle vier Winkelhalbieren des Vierecks ABCD durch einen Punkt gehen, und der hat dann denselben Abstand zu allen vier Seiten. Das Viereck ist demnach tatsächlich ein Tangentenviereck.

Wir haben hier einen *Problemlöseprozess* durchlaufen. Rekapitulieren wir: Gegeben war ein Viereck mit der Summenbedingung $a+c=b+d$. Zu zeigen war, dass dies Viereck einen Inkreis hat.
Wie bei Dreiecken: Inkreise haben mit Winkelhalbierenden zu tun.
Alle vier Winkelhalbierenden müssen kopunktal sein.
Wie bei Dreiecken: Es reicht zu zeigen, dass drei Winkelhalbierende kopunktal sind.
Übersetzung: Aus Winkelhalbierenden Mittelsenkrechte machen und ausnutzen, dass die Mittelsenkrechten eines Dreiecks kopunktal sind.
Die beiden wesentlichen Bestandteile waren also: Orientierung an einem bekannten Sachverhalt (über Dreiecke) und Übersetzung von Aussagen über Winkelhalbierende in Aussagen über Mittelsenkrechten.