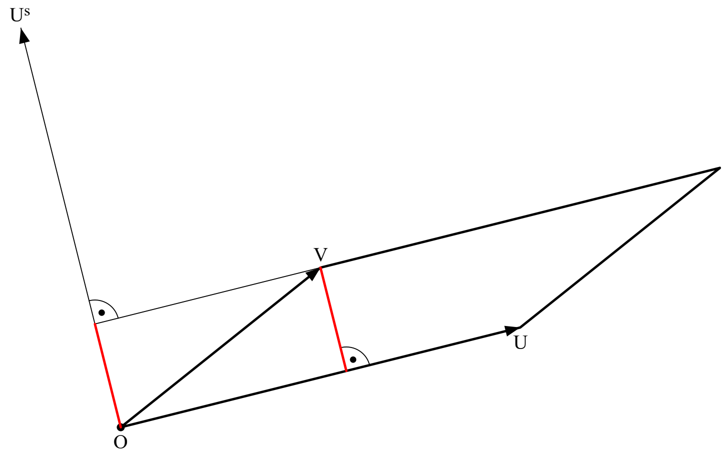
Jörg MEYER, Hameln

Vom Skalarprodukt zum Flächeninhalt eines n-Ecks

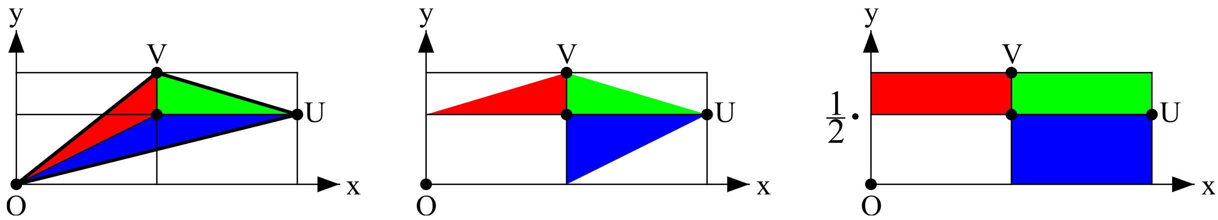
Die (gegen den Uhrzeigersinn angeordneten) Punkte $O=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ spannen ein Parallelogramm auf.
$U^s=\begin{pmatrix}-u_y\\u_x\end{pmatrix}$ entsteht durch Rotation von U um O gegen den Uhrzeigersinn um 90°.



Die (rote) Höhe des Parallelogramms ist $h=\frac{\left|V\cdot U^s\right|}{\left|U^s\right|}=\frac{\left|V\cdot U^s\right|}{\left|U\right|}$. Der Flächeninhalt des Parallelogramms ist dann $\left|U\right|\cdot h=\left|V\cdot U^s\right|=u_1\cdot v_2-u_2\cdot v_1=\begin{vmatrix}u_1 & v_1\\u_2 & v_2\end{vmatrix}=:[U,\,V]$.

Das Ergebnis ist positiv, wenn auf den Umlaufsinn geachtet wird. Es ist $[U,\,V]=-[V,\,U]$.

Geometrische Veranschaulichung:



Die Fläche von OUV lässt sich durch zwei Scherungen in das rechte Bild überführen. Das Doppelte des Flächeninhalts ist dann $(\text{rot}+\text{grün}+\text{blau}+\text{weiß})-\text{weiß}=u_1\cdot v_2-v_1\cdot u_2=\begin{vmatrix}u_1 & v_1\\u_2 & v_2\end{vmatrix}$.

Geht man über zu einem **allgemeinen** Dreieck ABC, so ist dessen Flächeninhalt gegeben durch

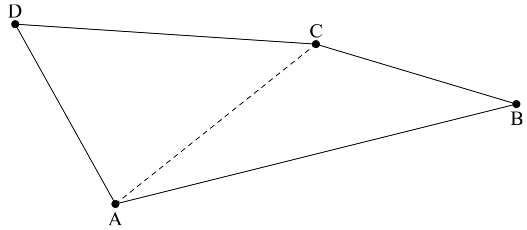
$$\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}b_1-a_1 & c_1-a_1\\b_2-a_2 & c_2-a_2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\left(\begin{vmatrix}b_1 & c_1-a_1\\b_2 & c_2-a_2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_1 & c_1-a_1\\a_2 & c_2-a_2\end{vmatrix}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\b_2 & c_2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}b_1 & a_1\\b_2 & a_2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\a_2 & c_2\end{vmatrix}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\cdot\left(\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\b_2 & c_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c_1 & a_1\\c_2 & a_2\end{vmatrix}\right)=:\frac{1}{2}\cdot\left([A,\,B]+[B,\,C]+[C,\,A]\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}\end{aligned}}$$

Geht man über zum **Viereck** ABCD, so ist dessen Flächeninhalt

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\left[A, B\right]+\left[B, C\right]+\left[C, A\right]+\left[A, C\right]+\left[C, D\right]+\left[D, A\right]\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\left[A, B\right]+\left[B, C\right]+\left[C, D\right]+\left[D, A\right]\right)$$



Diese Vorgehensweise überträgt sich auf Polygone mit mehr als 4 Ecken.