

Von Potenzsummen zum Hockey-Stick

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt auch für endliche Summen:

Mit $f(k) = F(k+1) - F(k)$ ist $\sum_{k=a}^b f(k) = \sum_{k=a}^b (F(k+1) - F(k)) = F(b+1) - F(a)$.

Potenzsummen

Zu $f(k) = k$ gehört $F(k) = \binom{k}{2}$, also $\sum_{k=1}^b k = F(b+1) - F(1) = \binom{b+1}{2} = \sum_{k=1}^b k$.

Zu $f(k) = \binom{k}{2}$ gehört $F(k) = \binom{k}{3}$, also $\sum_{k=1}^b \binom{k}{2} = \binom{b+1}{3}$.

Wegen $k^2 = 2 \cdot \binom{k}{2} + 1 \cdot \binom{k}{1}$ ist

$$\sum_{k=1}^b k^2 = 2 \cdot \sum_{k=1}^b \binom{k}{2} + \sum_{k=1}^b k = 2 \cdot \binom{b+1}{3} + \binom{b+1}{2} = \frac{b \cdot (b+1) \cdot (2 \cdot b + 1)}{6} = \sum_{k=1}^b k^2.$$

Zu $f(k) = \binom{k}{3}$ gehört $F(k) = \binom{k}{4}$, also $\sum_{k=1}^b \binom{k}{3} = \binom{b+1}{4}$.

Wegen $k^3 = 6 \cdot \binom{k}{3} + 6 \cdot \binom{k}{2} + \binom{k}{1}$ ist

$$\sum_{k=1}^b k^3 = 6 \cdot \sum_{k=1}^b \binom{k}{3} + 6 \cdot \sum_{k=1}^b \binom{k}{2} + \sum_{k=1}^b k = 6 \cdot \binom{b+1}{4} + 6 \cdot \binom{b+1}{3} + \binom{b+1}{2} = \frac{b^2 \cdot (b+1)^2}{4} = \sum_{k=1}^b k^3.$$

Und so weiter.

Verallgemeinerung:**Hockey-Stick**

Zu $f(k) = \binom{k}{n}$ gehört

$F(k) = \binom{k}{n+1}$, also

$$\sum_{k=n}^b \binom{k}{n} = \binom{b+1}{n+1}.$$

