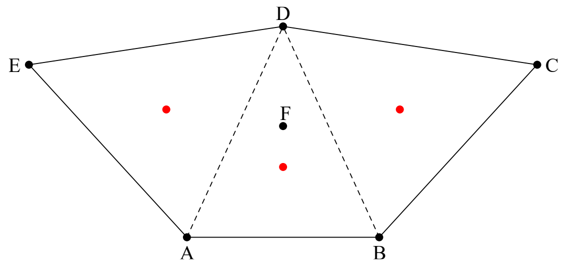
Jörg MEYER, Hameln

9. 10. 2022

Die Schwerpunkte eines konvexen ebenen Fünfecks

Für welche Fünfecke stimmt der Ecken-Schwerpunkt L mit dem Flächen-Schwerpunkt F überein?

Man mag vermuten, dass es sich um die affinen Bilder regulärer Fünfecke handelt. Um diese Vermutung zu falsifizieren, knn man sich (angeregt durch Hans WALSER) auf achsensymmetrische Fünfecke beschränken.



Das Fünfeck sei gegeben durch

$A=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0\\d\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}-u\\v\end{pmatrix}$,

und es sei $[UVW]$ der (vorzeichenbehaftete) Flächeninhalt des Dreiecks UVW.

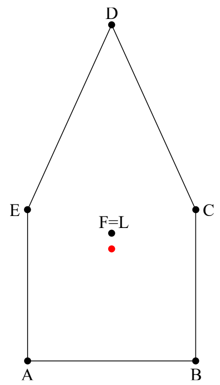
Der (schwarze) Flächen-Schwerpunkt F ist das gewichtete Mittel der (roten) Dreiecks-Schwerpunkte, woraus $F=\dfrac{[ADE]\cdot\dfrac{A+D+E}{3}+[ABD]\cdot\dfrac{A+B+D}{3}+[BCD]\cdot\dfrac{B+C+D}{3}}{[ABCDE]}$ mit $[ADE]=\dfrac{d\cdot u-d+v}{2}=[BCD]$ und $[ABD]=d$ folgt, also

$$F=\frac{\dfrac{d\cdot u-d+v}{6}\cdot\begin{pmatrix}-1-u\\d+v\end{pmatrix}+\dfrac{d}{3}\cdot\begin{pmatrix}0\\d\end{pmatrix}+\dfrac{d\cdot u-d+v}{6}\cdot\begin{pmatrix}1+u\\d+v\end{pmatrix}}{d\cdot u+v}=\frac{\begin{pmatrix}0\\d^2\cdot u+d\cdot u\cdot v+v^2\end{pmatrix}}{3\cdot(d\cdot u+v)}.$$

Der Ecken-Schwerpunkt ist $L=\dfrac{A+B+C+D+E}{5}=\dfrac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}0\\d+2\cdot v\end{pmatrix}$.

Beide Punkte stimmen überein für $u=\dfrac{v^2+3\cdot d\cdot v}{2\cdot d^2-d\cdot v}$ wie in der Graphik.

Dieses Fünfeck ist *kein* affines Bild eines regulären Fünfecks, denn dann müssten etwa AD und BC zueinander parallel sein, und dies ist nur für $u=\dfrac{v+d}{d}$ der Fall (dann ist auch $BD \parallel AE$), also nur für $\left(\dfrac{d}{v}\right)^2=\dfrac{d}{v}+1$ (Goldener Schnitt).



Wird d größer, so nähert sich das Fast-Dreieck ABCDE dem Dreieck ABD an. Die y-Koordinate des roten Ecken-Schwerpunkts von ABD ist $\dfrac{d}{3}$, und die y-Koordinate des schwarzen Ecken-Schwerpunkts von ABCDE ist $\dfrac{2\cdot v+d}{5}$. Der Unterschied verschwindet für $d=3\cdot v$.

Dann ist $u=\dfrac{2}{3}$, und ABCDE ist ein echtes Dreieck.