Jörg MEYER, Hameln

17. 11. 2022

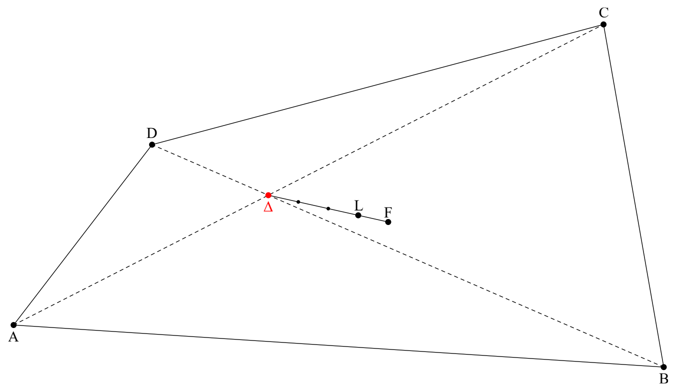
Die Schwerpunkte eines konvexen ebenen Vierecks

Inhalt

Beim Dreieck stimmen bekanntlich Ecken- und Flächen-Schwerpunkt überein. Das ist bei Vierecken i.a. nicht mehr der Fall.

Hauptresultate

Der Ecken-Schwerpunkt L, der Flächen-Schwerpunkt F und der Diagonalen-Schnittpunkt Δ liegen auf einer Geraden, und es ist $|\Delta L| = 3 \cdot |LF|$ (Satz von STOLL[1]).



Ist $L = F$, so ist ABCD ein Parallelogramm.

Stimmt L mit dem Kanten-Schwerpunkt überein, so ist ABCD ein Parallelogramm.
Zudem wird erläutert, wie man die Schwerpunkte konstruieren kann.

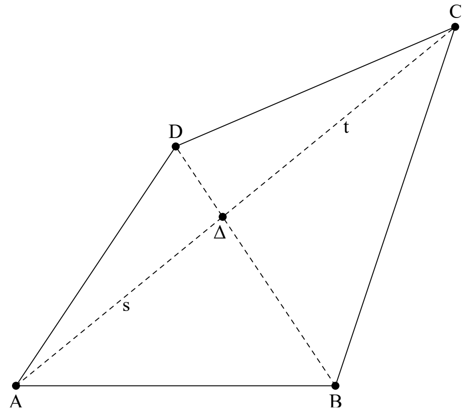
Es sei jeweils $[UVW]$ der Flächeninhalt des Dreiecks UVW sowie $[ABCD]$ der Flächeninhalt des Vierecks ABCD.

Der Diagonalen-Schnittpunkt eines Vierecks

Die Geraden AC und BD schneiden einander im Diagonalen-Schnittpunkt Δ des Vierecks ABCD.

---

[1] E. STOLL: Ueber den Schwerpunkt des Vierecks. In: Archiv Math. Phys. (Grunerts Archiv) **65** (1880), S. 445 f. Ein rein-synthetischer Beweis findet sich schon in W. FUHRMANN: Synthetische Beweise planimetrischer Sätze. 1890 Berlin: Leonhard Simion, §42. Die Sache ist also uralt.



Es ist $\Delta = \dfrac{t \cdot A + s \cdot C}{s+t}$ mit $\dfrac{s}{t} = \dfrac{[A\Delta D]}{[\Delta CD]} = \dfrac{[AB\Delta]}{[BC\Delta]}$, also

$\dfrac{s}{t} = \dfrac{[A\Delta D]+[AB\Delta]}{[\Delta CD]+[BC\Delta]} = \dfrac{[ABD]}{[BCD]}$ und somit

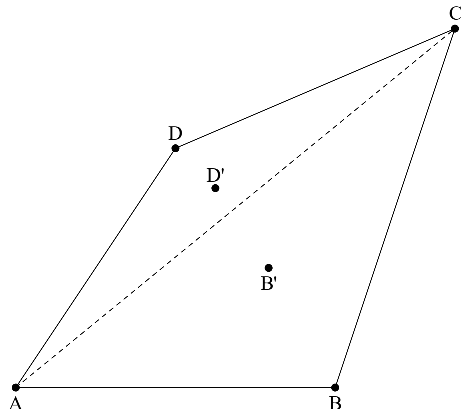
$$\Delta = \frac{A + \frac{s}{t} \cdot C}{1+\frac{s}{t}} = \frac{A + \frac{[ABD]}{[BCD]} \cdot C}{1+\frac{[ABD]}{[BCD]}} = \frac{A \cdot [BCD] + C \cdot [DAB]}{[ABCD]}.$$

Analog ist $\Delta = \dfrac{B \cdot [CDA] + D \cdot [ABC]}{[ABCD]}$.

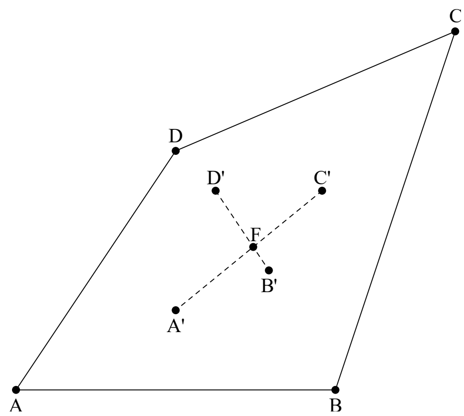
Insgesamt hat man nach Mittelwertbildung die symmetrische Darstellung

$$\boxed{\Delta = \frac{A \cdot [BCD] + B \cdot [CDA] + C \cdot [DAB] + D \cdot [ABC]}{2 \cdot [ABCD]}}.$$

Erster Weg zum Flächen-Schwerpunkt

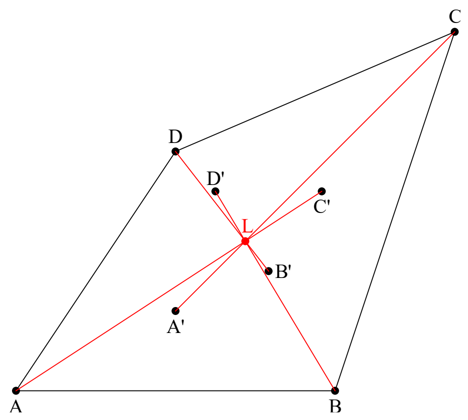


Es seien B‘ und D‘ die Flächen-Schwerpunkte (=Ecken-Schwerpunkte) von ABC und ACD.
Dann ist B’D‘ eine Schwerelinie mit dem allgemeinen Punkt $X(\lambda) = \dfrac{A+C+D}{3} + \lambda \cdot \dfrac{B-D}{3}$.
Sie ist also parallel zu BD und ein Drittel mal so lang.



Ist A‘ der Flächenschwerpunkt von ABD und C‘ der Flächenschwerpunkt von BCD, so ist A’C‘ die andere Schwerelinie.

Der Flächenschwerpunkt F von ABCD ist der Schnitt F beider Schwerelinien, also der Diagonalen-Schnittpunkt von A’B’C’D‘.



Es sei $L = \frac{A+B+C+D}{4}$ der **Ecken-Schwerpunkt** von ABCD.

Wegen $4 \cdot L = 3 \cdot A' + A$ geht $A' = \frac{4 \cdot L - A}{3}$ aus A durch eine zentrische Streckung an L mit dem Streckfaktor $-\frac{1}{3}$ hervor.

Insbesondere geht F durch eine zentrische Streckung an L mit dem Streckfaktor $-\frac{1}{3}$ aus dem Diagonalen-Schnittpunkt Δ von ABCD hervor.

Daher ist $\boxed{F = \frac{4 \cdot L - \Delta}{3}}$ mit $\Delta = \frac{A \cdot [BCD] + B \cdot [CDA] + C \cdot [DAB] + D \cdot [ABC]}{2 \cdot [ABCD]}$.

Zweiter Weg zum Flächen-Schwerpunkt

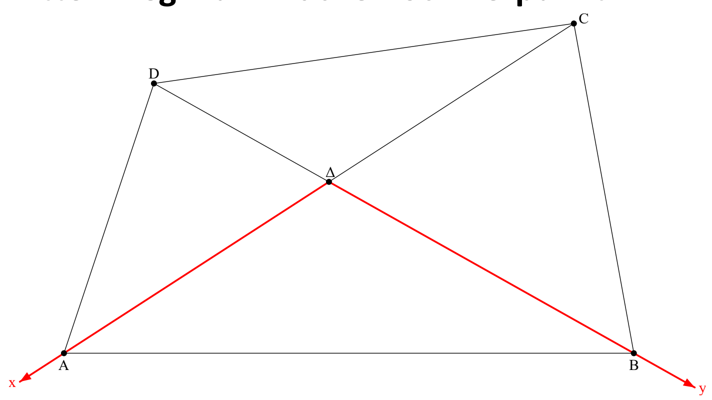
Die Flächenmasse verteilt sich auf die beiden Teildreiecke ABC und ACD. Die Masse eines Teildreiecks kann man sich in dessen Schwerpunkt vereinigt denken. Für den Flächen-Schwerpunkt F ergibt dies

$$F = \frac{[ABC] \cdot \frac{A+B+C}{3} + [ACD] \cdot \frac{A+C+D}{3}}{[ABCD]},$$

also

$$3 \cdot F = A + C + \frac{[ABC] \cdot B + [ACD] \cdot D}{[ABCD]} = A + C + B + D - \frac{[ACD] \cdot B + [ABC] \cdot D}{[ABCD]} = \boxed{4 \cdot L - \Delta = 3 \cdot F}.$$

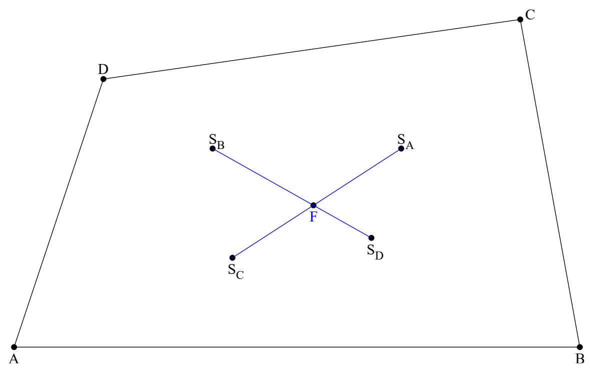
Dritter Weg[2] zum Flächen-Schwerpunkt



ABCD sei ein konvexes ebenes Viereck mit dem Diagonalen-Schnittpunkt Δ, der als Ursprung eines schiefwinkligen Koordinatensystems gemäß Figur genommen wird.
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 \\ -d \end{pmatrix}$$

[2] Variation von A. Kirsch (1987): Bemerkung zum Vierecksschwerpunkt. In: Did. d. Math., S. 34-36, insbes. S. 36.



Es ist S_A der Flächen- (=Ecken-)Schwerpunkt von BCD, also $S_A = 3 \cdot \begin{pmatrix} -c \\ b-d \end{pmatrix}$, entsprechend ist

$3 \cdot S_B = \begin{pmatrix} a-c \\ -d \end{pmatrix}$, $3 \cdot S_C = \begin{pmatrix} a \\ b-d \end{pmatrix}$, $3 \cdot S_D = \begin{pmatrix} a-c \\ b \end{pmatrix}$.

Der Flächen-Schwerpunkt von ABCD liegt einerseits auf der Verbindungsgeraden $S_A S_C:\ y = \frac{b-d}{3}$ und andererseits auf der Verbindungsgeraden $S_B S_D:\ x = \frac{a-c}{3}$. Der Schnittpunkt F ist gegeben durch $3 \cdot F = \begin{pmatrix} a-c \\ b-d \end{pmatrix}$. Der Ecken-Schwerpunkt L ist gegeben durch $4 \cdot L = \begin{pmatrix} a-c \\ b-d \end{pmatrix}$.

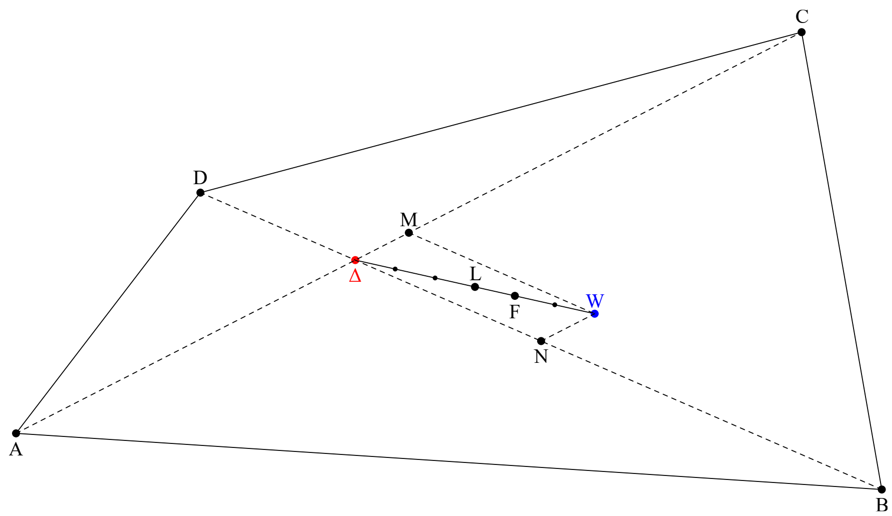
Daher sind Δ, L und F kollinear mit $L = \frac{\Delta + 3 \cdot F}{4}$.

Nähere Untersuchung

J. B. Miller[3] hat die Konfiguration von Δ, F und L näher untersucht: Spiegelt man

$\Delta = \frac{A \cdot [BCD] + B \cdot [CDA] + C \cdot [DAB] + D \cdot [ABC]}{2 \cdot [ABCD]}$ an $L = \frac{A+B+C+D}{4}$, bekommt man

$$W = 2 \cdot L - \Delta = \boxed{\frac{A \cdot [ABD] + B \cdot [BCA] + C \cdot [CDB] + D \cdot [DAC]}{2 \cdot [ABCD]} = W}.$$



Mit $M = \frac{A+C}{2}$ und $N = \frac{B+D}{2}$ ist $M + N = 2 \cdot L$ und daher $W = M + N - \Delta$. $M\Delta NW$ ist deshalb ein Parallelogramm.

Konstruktion des Ecken-Schwerpunkts

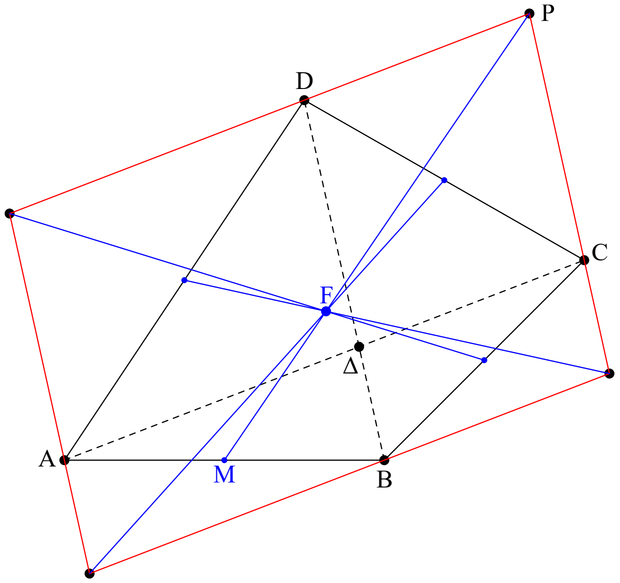
Die Konstruktion des Ecken-Schwerpunkts L ist wegen $L = \frac{A+B+C+D}{4} = \frac{\frac{A+B}{2} + \frac{C+D}{2}}{2}$ einfach.

[3] Centroid of quadrilateral. In: Gazette Austral. Math. Soc. **37** (2) (2010), S. 101-104.

Konstruktion des Flächen-Schwerpunkts

Hier gibt es mehrere Möglichkeiten.

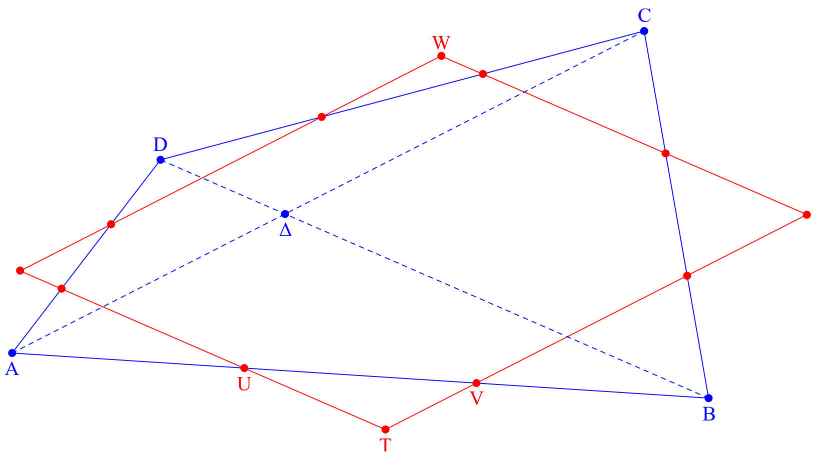
Die einfachste verwendet direkt die Beziehung $F=\frac{4\cdot L-\Delta}{3}$. Auch andere einfache Konstruktionen gehen aus von $F=\frac{4\cdot L-\Delta}{3}$. Von E. HENRY[4] oder von J. GYSEL[5] stammt der folgende Weg:



Zu den Diagonalen werden Parallelen durch die Eckpunkte gezeichnet; dadurch entsteht das rote Parallelogramm. Wegen $P=D+C-\Delta$ und mit $M=\frac{A+B}{2}$ ist $\frac{2\cdot M+P}{3}=\frac{A+B+D+C-\Delta}{3}=\frac{4\cdot L-\Delta}{3}=F$.

Eine Variante mit etwas mehr Aufwand stammt von dem österreichischen Ingenieur Ferdinand WITTENBAUER (1857-1922).

Die Vierecks-Seiten werden gedrittelt, und die Teilpunkte erzeugen gemäß Skizze ein rotes Parallelogramm, dessen Diagonalen-Schnittpunkt mit F übereinstimmt.



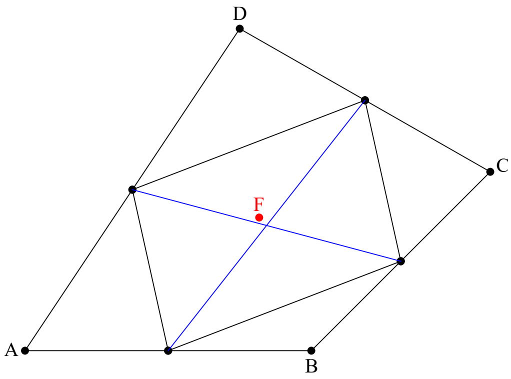
Begründung: Die Gerade durch $U=\frac{2\cdot A+B}{3}$ hat den allgemeinen Punkt $\frac{2\cdot A+B}{3}+\lambda\cdot(B-\Delta)$; für $\lambda=\frac{1}{3}$ bekommt man $\frac{2\cdot A+2\cdot B-\Delta}{3}$. Die Gerade durch $V=\frac{A+2\cdot B}{3}$ hat den allgemeinen Punkt $\frac{A+2\cdot B}{3}+\mu\cdot(A-\Delta)$; für $\mu=\frac{1}{3}$ bekommt man $\frac{2\cdot A+2\cdot B-\Delta}{3}$. Damit hat man T gefunden. Analog ist $W=\frac{2\cdot C+2\cdot D-\Delta}{3}$, woraus sich $\frac{T+W}{2}=\frac{A+B+C+D-\Delta}{3}=F$ ergibt.

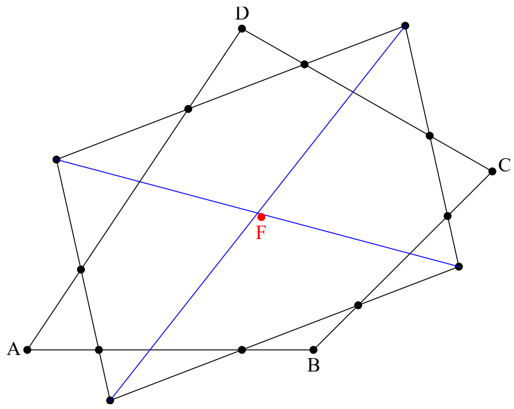
[4] Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften (1903-1915) III AB9 (S. 1008)

[5] J. E. Hofmann (1964): Geistreiche geometrische Konstruktionen im Wandel der Zeiten. In: Der Mathematikunterricht **10** (3), S. 7 – 47, insbes. S. 33.

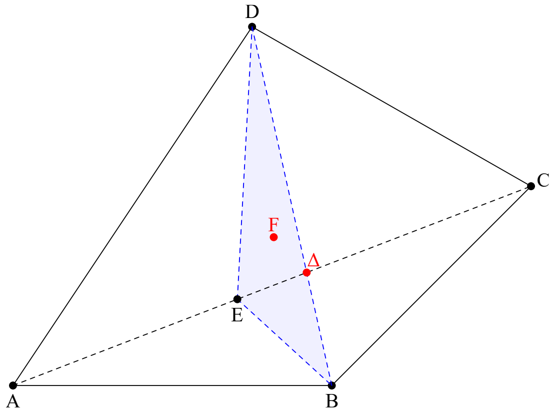
Wenn man die Vierecksseiten nicht drittelt, sondern halbiert, bekommt man das VARIGNON-Parallelogramm (unten links), dessen Diagonalen-Schnittpunkt i.a. mit F *nicht* übereinstimmt.

Wenn man die Vierecksseiten nicht drittelt, sondern viertelt, bekommt man ein Parallelogramm (unten rechts), dessen Diagonalen-Schnittpunkt i.a. mit F auch *nicht* übereinstimmt.





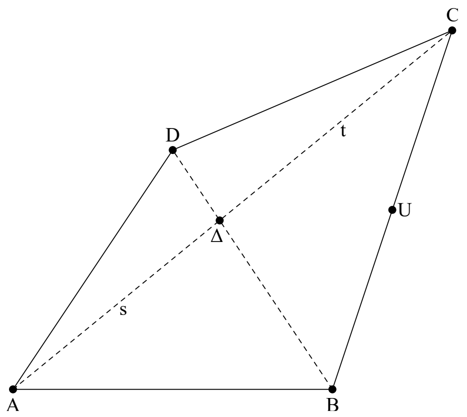
Eine weitere einfache Konstruktion stammt von J. B. BÉRARD[6] (1763- 1843):



Schreibt man $F=\frac{4\cdot L-\Delta}{3}=\frac{(A+C-\Delta)+D+B}{3}$, so hat $E=A+C-\Delta$ zu A denselben Abstand wie Δ zu C.
Dann ist F der Schwerpunkt des Dreiecks BDE.
Man konstruiere also E und bilde den genannten Schwerpunkt.

Unter welchen Umständen stimmt der Ecken- mit dem Flächen-Schwerpunkt überein?

Wegen $F=\frac{4\cdot L-\Delta}{3}$ ist $L=F$ genau dann, wenn $L=\Delta$ ist, wenn also der Ecken-Schwerpunkt mit dem Diagonalen-Schnittpunkt übereinstimmt.



Wenn der Diagonalen-Schnittpunkt Δ auch Ecken-Schwerpunkt ist, folgt $s=t$. Ist U der Mittelpunkt von BC, so ist ΔU Mittelparallele zum Dreieck ABC, also $AB \parallel \Delta U$.
Analog folgt $\Delta U \parallel DC$ und $BC \parallel AD$.
ABCD ist also ein Parallelogramm.
Umgekehrt stimmt bei jedem Parallelogramm der Ecken-Schwerpunkt mit dem Diagonalen-Schnittpunkt überein.

[6] Hofmann, loc. cit., S. 34.

Damit gilt: Stimmt bei einem Viereck der Ecken- mit dem Flächen-Schwerpunkt überein, so handelt es sich um ein Parallelogramm.

Der Kanten-Schwerpunkt

Den Kanten-Schwerpunkt K bekommt man, indem man sich die Kanten jeweils in deren Mittelpunkt vereinigt denkt, also mit $a:=[AB];\ b:=[BC];\ c:=[CD];\ d:=[DA]$ als

$$K=\frac{\frac{A+B}{2}\cdot a+\frac{B+C}{2}\cdot b+\frac{C+D}{2}\cdot c+\frac{D+A}{2}\cdot d}{a+b+c+d}.$$

Kanten- und Ecken-Schwerpunkte stimmen nur bei Parallelogrammen überein, denn nach etwas Rechnung ist

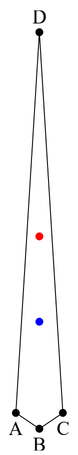
$$\begin{aligned}K-E&=\frac{(C+D-A-B)\cdot(c-a)+(A+D-B-C)\cdot(d-b)}{4\cdot(a+b+c+d)}\\&=:\lambda\cdot(C+D-A-B)+\mu\cdot(A+D-B-C)=:\lambda\cdot U+\mu\cdot V\end{aligned}$$

Wären U und V zueinander parallel, so wäre mit O als Ursprung

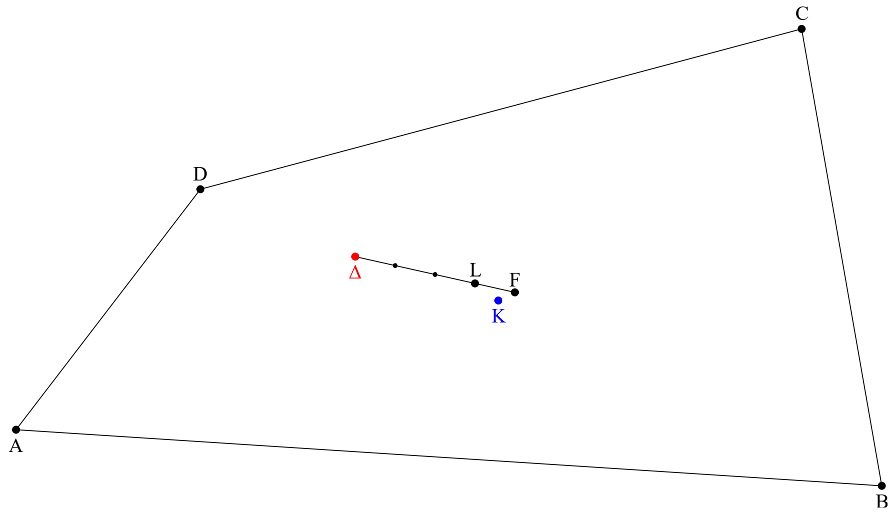
$$\begin{aligned}&(C+D-A-B)=\kappa\cdot(A+D-B-C)\\&O=(\kappa+1)\cdot A+(-\kappa+1)\cdot B+(-\kappa-1)\cdot C+(\kappa-1)\cdot D\\&O=(\kappa+1)\cdot(A-C)+(\kappa-1)\cdot(D-B)\end{aligned}$$

Damit wären auch CA und BD zueinander parallel, was für konvexe Vierecke nicht zutreffen kann.

Die rechte Seite von $K-E$ ist also der Term einer Ebene. Der Punkt O wird durch und nur durch $c-a=d-b=0$ beschrieben, und somit handelt es sich bei dem Viereck um ein Parallelogramm.



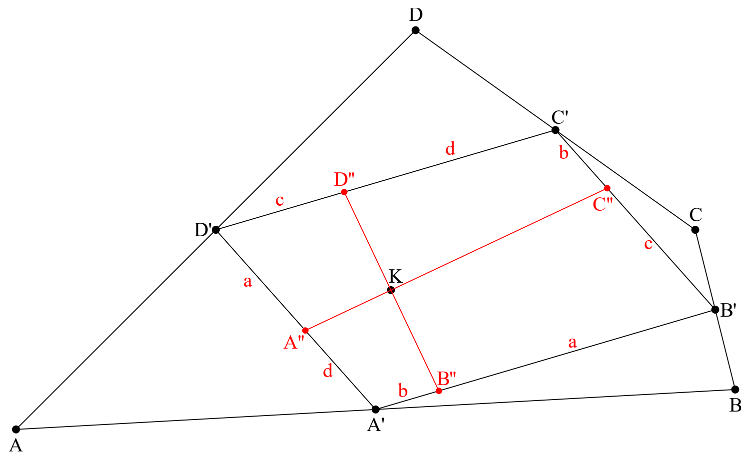
Dass bei einem beliebigen Viereck der Kanten-Schwerpunkt mit dem Ecken-Schwerpunkt nicht übereinstimmt, sieht man am Beispiel links:
Der blaue Ecken-Schwerpunkt liegt dichter an den Punkten A, B, C, und der rote Kanten-Schwerpunkt liegt etwa auf halber Höhe der Figur.



Der Kanten-Schwerpunkt K liegt i.a. nicht auf der Geraden durch L und F.

Konstruktion des Kanten-Schwerpunkts

Zur Konstruktion des Kanten-Schwerpunkts: Mit $A':=\frac{A+B}{2}; B':=\frac{B+C}{2}; C':=\frac{C+D}{2}; D':=\frac{D+A}{2}$ sei



$A''=\frac{a\cdot A'+d\cdot D'}{a+d}$; $C''=\frac{b\cdot B'+c\cdot C'}{b+c}$

usf.

Dann ist $\frac{(b+c)\cdot A''+(a+d)\cdot C''}{a+b+c+d}=K$

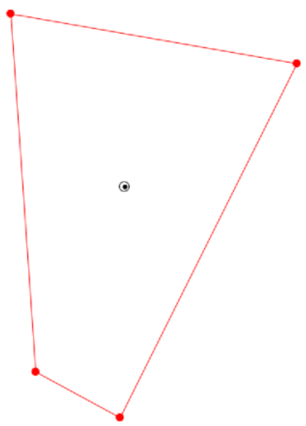
und analog

$K=\frac{(a+b)\cdot D''+(c+d)\cdot B''}{a+b+c+d}$.

K ist also Diagonalen-Schnittpunkt von A“B“C“D“.

Die Hilfspunkte A“ usw. sind einfach zu konstruieren.

Beziehung zwischen Kanten- und Flächen-Schwerpunkt



Kanten- und Flächen-Schwerpunkte können auch dann übereinstimmen, wenn es sich nicht um ein Parallelogramm handelt[7].

Der ausgefüllte Kreis stellt den Kanten- und der hohle Kreis den Flächen-Schwerpunkt dar.

[7] Eine Klassifikation der Lösungen findet sich in T. Meixner, K. Metsch (2004): Über Vierecke, in denen Kanten- und Flächenschwerpunkte übereinstimmen. In: Mathem. Sem.-Ber. **51**, S. 131-145.
Siehe auch A. Al-Sharif, M. Hajja, P. Krasopoulos: Coincidences of Centers of Plane Quadrilaterals. In: Results in Mathematics **55** (Nov. 2009), S. 1-16.