Jörg MEYER, Hameln

Die Sattelfläche im Grundkurs[1]

Einleitung

Was sollte man von einem Fremdsprachenunterricht halten, der sich darauf beschränkte, grammatische Regeln isoliert und abstrakt zu üben, aber niemals zum Sprechen oder zur Lektüre zusammenhängender Texte käme? Daß die Schüler mit sinnlosem Formaldrill nicht ihre Zeit vergeuden wollen, ist ihr gutes Recht.

Was hält man aber von einem Unterricht in Vektorgeometrie, dessen Höhepunkt darin besteht, Geraden mit Ebenen zu schneiden oder Abstände zwischen Punkten und Raumgeraden auszurechnen, garniert mit dem vagen Hinweis, daß man so etwas bei Anwendungen in den Wirtschaftswissenschaften o.ä. brauche, zu denen man aber aus Zeitmangel oder aufgrund der damit verbundenen intellektuellen Schwierigkeiten ohnehin nicht kommt? Was hat dieses Vorgehen mit Geometrie zu tun? Erfährt der Schüler Neues über den ihn umgebenden Raum, oder werden nur Belanglosigkeiten mit erhöhtem formalen Aufwand aufgebläht? Erfährt der Schüler die Kraft vektorgeometrischer Methoden, oder bleibt man in den Banalitäten des Anfangs stecken?

Ich möchte hier für einen Unterrichtsgegenstand plädieren, der auch für Grundkurse gut zugänglich ist, bei dem die Schüler erfahren können, daß die in der Vektorgeometrie gelernten Verfahren wirklich ihren Nutzen haben, indem ein zunächst schwer vorstellbares Objekt (die Sattelfläche) mit den erwähnten Methoden fruchtbar untersucht werden kann. Im Verlauf dieser Untersuchung werden die Begriffe der Vektorgeometrie mit neuem Leben (bei manchen Schülern auch zum ersten Mal mit Leben) erfüllt, formale Gleichungen müssen anschaulich interpretiert werden, und das Verständnis der Verfahren nimmt zu (bzw. wird erst entwickelt). Insofern trägt dieser Beitrag zur Sinnhaltigkeit des Mathematikunterrichts bei. (Auch in der Analysis wird das Begriffsverständnis durch geeignete Kurvendiskussionen gefördert.)

Das zu beschreibende Unterrichtskonzept wurde von mir im Grundkursbereich ausprobiert (Zeitbedarf: 10 bis 12 Stunden); ein an einer Verständniszunahme zu messender Erfolg war zwar nicht bei restlos allen Teilnehmern zu verzeichnen, aber im Durchschnitt deutlich vorhanden. Dazu kam, daß die Sattelfläche und die Art, mit ihr umzugehen, bei einer Reihe von Schülern durchaus auf Interesse stieß.

Ein mögliches Gegenargument, dieses Thema in Grundkursen zu behandeln, ist, daß es dafür viel zu schwierig sei. Der Unterricht kann frustrierend sein, man bleibt immer wieder wegen schlechter Vorkenntnisse hängen, muß immer wieder Dinge erklären, die doch längst sitzen sollten. Aber genau dieses ist bitter nötig! Gerade, weil man an dem hier vorgeschlagenen Thema fast alles aus der Vektorgeometrie so gut wiederholen und aus neuer Perspektive neu beleuchten kann, ist es vorzüglich als Unterrichtsgegenstand geeignet!
(Dies spricht ja auch für die Behandlung der Kegelschnitte, für die allerdings vektorielle Methoden nicht notwendig sind.)

Vorbereitung

Mittelsenkrechten sind als Ortsmengen in der Ebene bekannt. Eine Übertragung auf den Raum ist mit geringer Mühe anschaulich klar; wenn man will, kann man dies auch ausrechnen lassen, um mit der anschaulichen Interpretation von Rechenresultaten vertraut zu machen.

Die zunächst harmlos erscheinende Frage nach denjenigen Punkten, die zu zwei Raumgeraden denselben Abstand haben, ist für zueinander parallele oder sich schneidende Geraden noch einfach zu beantworten, erzeugt aber bei zueinander windschiefen Geraden Ratlosigkeit.
Anhand von zwei Stangen können zwar einzelne Punkte, die zu diesen beiden Stangen äquidistant sind, angegeben werden und man ahnt vage Symmetrien (solche enaktive Vorbereitung ist natürlich notwendig, damit die Schüler eine Chance haben, das gestellte Problem wirklich zu ihrem Problem zu machen), aber was diese Punkte zusammen für ein Gebilde ergeben (das die Bezeichnung Γ erhält), ist unklar. Hier versagt das anschauliche Denken, und die Mathematik hat Gelegenheit, ihre Kraft zu entfalten, um es mal etwas salbungsvoll zu formulieren. Die Schüler werden aber tatsächlich erfahren, daß die Vektorgeometrie Aufschluß über die Struktur von Γ liefert.

---

[1] Eine leicht veränderte Fassung erschien in Praxis der Mathematik **37** (6), S. 250 – 255 (1995).

Notation

Zwischen Ortsvektoren und Punkten besteht eine Bijektion; aus diesem Grunde werde ich Ortsvektoren wie Punkte bezeichnen, nämlich als $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$. Richtungsvektoren lassen sich auch als Ortsvektoren auffassen; ich bezeichne sie i.a. mit R.

Eine Gerade g besteht aus allen Punkten G_s der Form $G_s = A + s \cdot R$; sie wird kurz als $g: \ G_s = A + s \cdot R$ beschrieben.

Γ als Ortsfläche

Der Abstand eines Punktes P zu einer Raumgerade $g: \ G_s = A + s \cdot R$ ist gegeben durch

$$d^2(P, g) = (P - A)^2 - \frac{\left((P - A) \cdot R\right)^2}{R^2}.$$

Es seien nun f und g zwei Geraden im dreidimensionalen Raum. Das Problem, die Menge Γ aller Punkte X mit gleichem Abstand zu f und g zu bestimmen, ist trivial, falls f zu g parallel ist oder wenn f und g einander schneiden. Aus diesem Grunde seien nun f und g zueinander <u>windschief</u>.

Nun erleichtert es die Rechnung und damit den Durchblick, ohne die Allgemeinheit einzuschränken, wenn das Koordinatensystem geeignet gewählt wird (das ist ja eine fundamentale Idee der Linearen Algebra!). Geeignet heißt hier, daß f und g eine möglichst einfache Darstellung mit hohem Symmetrieanteil haben. Eine solche Darstellung ist die folgende, die sich als günstig erweisen wird und die deshalb für alle weiteren Rechnungen vorausgesetzt wird:

$$f: \ F_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \cdot m \\ 1 \end{pmatrix}; \quad g: \ G_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -s \cdot m \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dabei sei m von 0 verschieden.

Für $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ist $d\left(X, f\right) = d\left(X, g\right)$ äquivalent zu

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 - \frac{(x + y \cdot m)^2}{1 + m^2} = x^2 + y^2 + (z+1)^2 - \frac{(x - y \cdot m)^2}{1 + m^2}$$

und damit zu

$$z \cdot (1 + m^2) + x \cdot y \cdot m = 0.$$

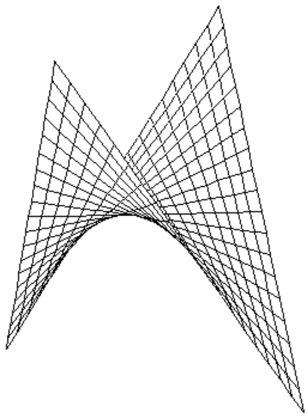
Die weiteren Rechnungen gestalten sich etwas übersichtlicher, wenn man $n := -\frac{m}{1 + m^2}$ setzt. Dann ist Γ die Menge aller Punkte $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, für die

$$z = n \cdot x \cdot y$$

gilt.

Γ ist ein dreidimensionales Gebilde; jedem $(x; y)$-Wert wird genau ein z-Wert, nämlich $z = n \cdot x \cdot y$ zugeordnet. Es handelt sich hier also um eine Funktion von $\mathbf{R}^2$ nach $\mathbf{R}$. Der zugehörige Graph Γ stellt eine <u>Fläche</u> dar, die man sich auch als Oberfläche eines Gebirges vorstellen kann: Jedem Punkt der zugrunde liegenden Ebene ist eine Höhe zugeordnet. Damit ist zugleich eine Idee angedeutet, wie man sich einen Überblick über das Gebirge Γ verschaffen kann: Bei einer Landkarte dienen dazu Höhenlinien. Das ist auch bei Γ ein sinnvolles Verfahren.

Für einen ersten Überblick ist auch der Einsatz eines graphikfähigen Computer-Algebra-Systems sinnvoll. Allerdings wirft der Graph zu $z = n \cdot x \cdot y$ mehr Fragen als Antworten auf: Eine pädagogisch fruchtbare Situation!



Ob man jetzt mit dem nächsten Abschnitt (Erste Überlegungen) oder gleich mit dem übernächsten (Tomographie von Γ) fortfährt oder für den Unterricht eine Mischform wählt, hängt von der Reaktion der Schüler oder vom eigenen Geschmack ab.

Erste Überlegungen

Setzt man in der Gleichung für $z = n \cdot x \cdot y$ den Wert für n als 1 ein (d.h. streckt man die z-Achse geeignet; daß dieser Wahl von n kein reelles m entspricht, ändert nichts am Sinn dieser Vorgehensweise), so handelt es sich bei Γ um die Fläche des 1x1.
Mit dieser Interpretation kann man sich Γ schon besser vorstellen: Entlang der x- und der y-Achse hat das Gebirge die Höhe 0; ferner befindet sich die Fläche oberhalb des I. und III. Quadranten und unterhalb des II. und IV. Quadranten der x-y-Koordinatenebene.
Ferner erkennt man, daß Γ zu den Koordinatenachsen und zu den Ebenen mit den Gleichungen $y = x$ und $y = -x$ symmetrisch ist.
Alle diese Aussagen sind unabhängig von Streckungen der z-Achse, gelten also auch für die Gleichung $z = n \cdot x \cdot y$.

Die Bezeichnung von Γ als Sattelfläche sollte damit geklärt sein: Sitzt man im Ursprung auf Γ, indem der Oberkörper in z-Richtung zeigt und das Gesicht in Richtung einer der Winkelhalbierenden der x-y-Ebene, so wölbt sich die Fläche links und rechts von einem nach unten (so daß man bequem sitzen kann), vor und hinter einem aber wölbt sie sich nach oben, so daß man zwar nicht nach hinten fällt, aber auch nicht viel sieht.

Tomographie von Γ

Zunächst einmal sieht man, daß der Ursprung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf Γ liegt, wie man es ja auch erwartet. Das weitere Vorgehen ist analog zum Erstellen einer Wertetabelle:

Ist $z = 0$, so folgt $x = 0$ oder $y = 0$. Die y-Achse und die x-Achse gehören mithin vollständig zu Γ.
Die Gleichung $z = 0$ beschreibt eine Ebene. Das soeben erhaltene Ergebnis läßt sich also auch so interpretieren: Schneidet man Γ mit der Ebene zu $z = 0$, erhält man zwei Geraden, nämlich die x-Achse und die y-Achse.

Formal: Das Gleichungssystem $z = n \cdot x \cdot y \quad \wedge \quad z = 0$ ist zu $(x = 0 \quad \wedge \quad z = 0) \quad \vee \quad (y = 0 \quad \wedge \quad z = 0)$ äquivalent. (Redundanzen dieser Art sind - gerade im Grundkursbereich - nicht schädlich!)

Ist $z = k$ (k sei eine von 0 verschiedene Konstante), so folgt $x \cdot y = \frac{k}{n}$, $x \cdot y$ ist somit konstant. Schneidet man also Γ mit der Ebene zu $z = k$, erhält man Hyperbeln. (Diese Kurven sind aus den Klassen 7-10 bekannt; deshalb ist die oben vorgenommene Wahl des Koordinatensystems sinnvoll.) Interpretiert man z als

Höhenkoordinate, so sind die Hyperbeln die Höhenlinien des „Gebirges“ Γ. Diese Vorgehensweise läßt sich auch als Tomographie (besser: Tomoskopie) kennzeichnen.

Weitere Untersuchungsebenen liegen nahe:

Ist $x = 0$, so folgt $z = 0$; man erhält also wieder die y-Achse.

Ist $x = c$ (c sei eine von 0 verschiedene Konstante), so folgt $z = n \cdot c \cdot y$; es handelt sich also um die Gerade

$$i_c:\ P_y = \begin{pmatrix} c \\ y \\ n\cdot c\cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ n\cdot c \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist i_0 die y-Achse.

Ist $y = 0$, so folgt auch $z = 0$; man erhält also jetzt die x-Achse.

Ist $y = d$ (d sei eine von 0 verschiedene Konstante), so folgt $z = n \cdot d \cdot x$; es handelt sich hier um die Gerade

$$j_d:\ P_x = \begin{pmatrix} x \\ d \\ n\cdot d\cdot x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ n\cdot d \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist j_0 die x-Achse.

Auch Schnitte, die nicht parallel zu den Achsen sind, können Aufschluß geben:

Ist $y = x + a$, so ist das Schnittgebilde eine Parabel mit den Gleichungen

$$p_a:\ z = n \cdot x \cdot (x + a) \quad \wedge \quad y = x + a.$$

Ein beliebiger Punkt auf p_a hat also die Form $\begin{pmatrix} x \\ x+a \\ n\cdot x\cdot(x+a) \end{pmatrix}$.

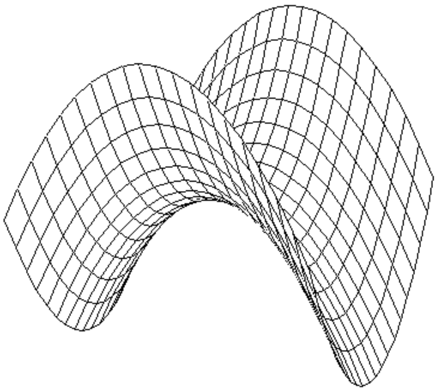
Ist hingegen $y = -x + b$, so erhält man als Schnittgebilde wieder eine Parabel, aber diesmal mit den Gleichungen

$$q_b:\ z = -n \cdot x \cdot (x - b) \quad \wedge \quad y = -x + b.$$

Somit hat ein beliebiger Punkt auf q_b die Form $\begin{pmatrix} x \\ -x+b \\ n\cdot x\cdot(-x+b) \end{pmatrix}$.

Der Scheitelpunkt von p_a ist $\begin{pmatrix} -a/2 \\ a/2 \\ -n\cdot a^2/4 \end{pmatrix}$; er liegt auf q_0. Analog liegen die Scheitelpunkte der Parabeln q_b alle auf p_0.

Aus diesem Grunde kann man sich das Aussehen von Γ folgendermaßen vorstellen: Eine Parabel wird parallel zu sich selbst verschoben, und zwar so, daß ihr Scheitelpunkt auf einer anderen, in entgegengesetzter Richtung geöffneten und gegenüber der sich bewegenden Parabel um 90° gedrehten Parabel entlang gleitet. Das Gebilde Γ wird auf diese Weise überstrichen; es ist eine Schiebungsfläche. Da es von einer Parabel überstrichen wird, heißt es Paraboloid, und da geeignete Schnitte Hyperbeln aus ihr ausschneiden, heißt es genauer hyperbolisches Paraboloid.



<u>Γ als Regelfläche</u>

Bei der tomographischen Untersuchung von Γ wurde schon festgestellt, daß die Geradenscharen (i_c) und (j_d) mit $i_c:\ P_y = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ n \cdot c \end{pmatrix}$ und $j_d:\ P_x = \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ n \cdot d \end{pmatrix}$ ganz in Γ liegen. Das ist, so betrachtet, ein ungewöhnliches Ergebnis: Eine Fläche, die nicht eben, sondern sattelförmig ist, und in der unendlich viele Geraden liegen!

Man staunt noch mehr, wenn man feststellt, daß die Geraden der ersten Schar paarweise windschief zueinander sind:

Für $c \neq d$ ist i_c zu i_d windschief.
Für alle c gilt aber: i_c ist zur y-z-Ebene parallel, also zu j_0, der x-Achse, orthogonal.

Analog gilt:

Für $c \neq d$ ist j_c zu j_d windschief.
Für alle d gilt aber: j_d ist zur x-z-Ebene parallel, also zu i_0, der y-Achse, orthogonal.

Weiter rechnet man leicht nach, daß jede Gerade der ersten Schar jede Gerade der zweiten Schar schneidet:

i_c schneidet j_d in $Q_{c,d} = \begin{pmatrix} c \\ d \\ n \cdot c \cdot d \end{pmatrix}$.

Man sieht: die Menge der Schnittpunkte ist Γ.

Umgekehrt gehen durch jeden Punkt $Q_{c,d} = \begin{pmatrix} c \\ d \\ n \cdot c \cdot d \end{pmatrix}$ auf Γ die beiden Geraden i_c und j_d.

Was passiert eigentlich, wenn man alle Geraden i_c der ersten Schar (i_c) zusammennimmt? Es ist nach dem Vorigen anzunehmen, daß man dadurch alle Punkte von Γ erhält, und daß das stimmt, zeigt folgende Überlegung:

Ein allgemeiner Punkt auf Γ ist $Q_{c,d} = \begin{pmatrix} c \\ d \\ n \cdot c \cdot d \end{pmatrix}$. Schreibt man ihn als $Q_{c,d} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ n \cdot c \end{pmatrix}$, so sieht man, daß er auf i_c liegt. Schreibt man hingegen $Q_{c,d} = \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ n \cdot d \end{pmatrix}$, so sieht man, daß er auch auf j_d liegt. Daraus folgt:

Γ besteht aus allen Geraden i_c .

> Γ besteht auch aus allen Geraden j_d .

Dabei heißt „bestehen aus ...“ genauer: „ist Vereinigung von ...“.

Eine aus Geraden bestehende Fläche heißt Regelfläche. Zylinder und Doppelkegel sind triviale Beispiele von Regelflächen. Das hyperbolische Paraboloid ist demnach eine Regelfläche im doppelten Sinn:

> Γ besteht auf zwei Arten aus einer Schar von paarweise zueinander windschiefen Geraden.
>
> Jede Gerade der einen Schar schneidet jede Gerade der anderen Schar.

Geraden und Γ

Gibt es außer den Geraden der Scharen (i_c) und (j_d) weitere Geraden auf Γ? Dazu sei $g: G_s = Q_{c,d} + s \cdot R$ mit $R = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ eine Gerade durch den Punkt $Q_{c,d} = \begin{pmatrix} c \\ d \\ n \cdot c \cdot d \end{pmatrix}$ auf Γ, die ganz in Γ verlaufen soll.

Dann muß für jedes s der Geradenpunkt $Q_{c,d} + s \cdot R = \begin{pmatrix} c + s \cdot u \\ d + s \cdot v \\ n \cdot c \cdot d + s \cdot w \end{pmatrix}$ zu Γ gehören; das bedeutet aber

$$n \cdot c \cdot d + s \cdot w = n \cdot (c + s \cdot u) \cdot (d + s \cdot v)$$

und damit

$$0 = s \cdot u \cdot v + \left(u \cdot d + v \cdot c - \frac{w}{n} \right)$$

für alle s. Die letzte Gleichung ist nur dann für alle s erfüllt, wenn (Koeffizientenvergleich!)

$$u \cdot v = 0 \text{ und } \frac{w}{n} = c \cdot v + d \cdot u$$

ist. Ist $u = 0$, so folgt $w = n \cdot c \cdot v$, und es ist $R = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ n \cdot c \cdot v \end{pmatrix}$. In diesem Falle ist mithin $g: G_s = Q_{c,d} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ n \cdot c \end{pmatrix}$, also $g = i_c$. Ist hingegen $v = 0$, so schließt man in analoger Weise auf $g = j_d$. Zusammenfassend gilt also:

> Die zu den schon bekannten Geradenscharen (i_c) und (j_d) gehörenden Geraden sind die einzigen Geraden, die ganz in Γ verlaufen.

Die ganz in Γ verlaufenden Geraden i_c und j_d sind insbesondere Tangenten an Γ.

Gibt es weitere Tangenten an Γ? Dazu sei $t: G_s = Q_{c,d} + s \cdot R$ mit $R = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ eine Tangente durch den Punkt $Q_{c,d} = \begin{pmatrix} c \\ d \\ n \cdot c \cdot d \end{pmatrix}$ auf Γ. Dann muß t die Fläche Γ in G_s berühren; d.h. die Schnittgleichung

$$n \cdot c \cdot d + s \cdot w = n \cdot (c + s \cdot u) \cdot (d + s \cdot v)$$

muß die doppelte Lösung $s = 0$ haben. Dies führt auf das Gleichungspaar

$$u \cdot v \neq 0 \quad \wedge \quad u \cdot d + v \cdot c - \frac{w}{n} = 0 .$$

Schreibt man die zweite Gleichung als $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ c \\ -1/n \end{pmatrix} = 0$, so sieht man, daß alle Tangenten durch $Q_{c,d}$ auf $\begin{pmatrix} d \\ c \\ -1/n \end{pmatrix}$ senkrecht stehen müssen, also in der Ebene

$$T_Q : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ c \\ -1/n \end{pmatrix} = c \cdot d$$

liegen müssen. T_Q heißt <u>Tangentialebene</u> zu $Q_{c,d}$.

Die Tangentialebene zu $Q_{c,d}$ hat mit Γ nur $Q_{c,d}$ und die beiden Geraden i_c und j_d gemeinsam, da das Gleichungspaar

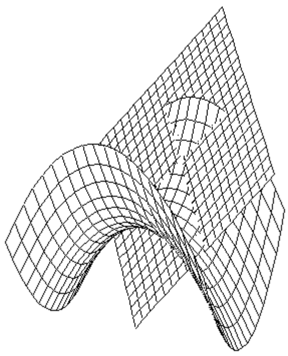
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ c \\ -1/n \end{pmatrix} = c \cdot d \quad \wedge \quad z = n \cdot x \cdot y$$

zu

$$(y-d) \cdot (x-c) = 0 \quad \wedge \quad z = n \cdot x \cdot y$$

äquivalent ist.

Man mache sich übrigens klar, daß die Tangentialebene die Sattelfläche schneidend berührt!



<u>Ein Modell von Γ</u>

Die Gerade f besteht aus den Punkten $F_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \cdot m \\ 1 \end{pmatrix}$, entsprechend besteht die Gerade g aus den Punkten $G_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -s \cdot m \\ -1 \end{pmatrix}$. Wegen $d(F_s, F_{s+1}) = d(G_s, G_{s+1})$ werden f und g in dieser Darstellung mit demselben Maßstab parametrisiert.

Nun betrachte man die F_s und G_s verbindenden Geraden

$$k_s : \; P_t = F_s + t \cdot (G_s - F_s) = \begin{pmatrix} s \\ s \cdot m \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot s \cdot m \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \cdot m \cdot (1 + 2 \cdot t) \\ 1 + 2 \cdot t \end{pmatrix}.$$

Alle Verbindungsgeraden k_s zusammen stellen ein Gebilde dar, das aus denjenigen Punkten $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ besteht, für die $y = m \cdot x \cdot z$ ist. Diese Gleichung hat dieselbe Struktur wie die das hyperbolische Paraboloid Γ definierende Gleichung $z = n \cdot x \cdot y$. Die Verbindungsgeraden k_s zusammen bilden also auch ein hyperbolisches Paraboloid!

Damit ist klar, wie man das Modell einer Sattelfläche basteln kann: Man nehme zwei den Geraden f und g entsprechende Stangen und versehe beide mit einer Zentimeterskala. Verbindet man gleiche Zentimetermarken auf f und g mit jeweils einer Querstange, so bildet die Menge der Querstangen ein hyperbolisches Paraboloid.

Nun ist es eine sinnvolle Verständnisübung, zu überlegen, welche Geraden man nehmen muß, um auf die Sattelfläche mit der vertrauten Gleichung $z = n \cdot x \cdot y$ zu kommen.
Die Antwort ist (natürlich) nicht eindeutig; beispielsweise wird Γ von den Quergeraden zu i_1 und i_{-1} gebildet; die Quergeraden sind dann die Geraden der Schar (j_d).

Schlußbemerkung

Das hyperbolische Paraboloid wurde von Euler im Verlauf seiner Klassifikation quadratischer Flächen entdeckt (Introductio in analysin infinitorum, 1748), aber von ihm nicht näher untersucht. Daß es sich dabei um eine Regelfläche handelt, steht zuerst bei Monge/Hachette (Application de l'algèbre à la géométrie, 1802).

Mit dem hyperbolischen Paraboloid verwandt ist das einschalige Hyperboloid (Kühlturmfläche). Dieses erhält man als Menge aller Punkte, deren Entfernungen zu zwei windschiefen Geraden in einem konstanten Verhältnis stehen. Auch das einschalige Hyperboloid ist eine Regelfläche im doppelten Sinne. Es ist das Treffgeradengebilde zu drei windschiefen Geraden, die kein gemeinsames Lot haben.