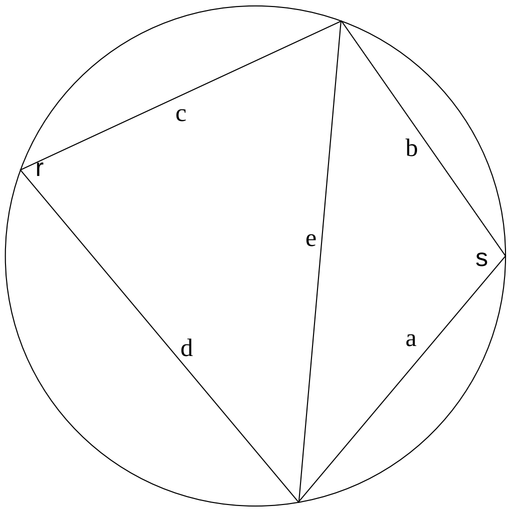
Dr. Jörg Meyer, Hameln

9. 4. 2020

Zum (konvexen) Sehnenviereck, dem Satz des PTOLEMÄUS und dessen Folgerungen



Da sich in einem Sehnenviereck die Gegenwinkel zu 180° ergänzen, ist $\rho = 180° - \sigma$.
Es sei

$$\tau_b = a \cdot b + c \cdot d$$
$$\tau_c = a \cdot c + b \cdot d$$
$$\tau_d = a \cdot d + b \cdot c$$

Wegen $e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\sigma$ und $e^2 = c^2 + d^2 + 2 \cdot c \cdot d \cdot \cos\sigma$ ist einerseits $\cos\sigma = \frac{a^2 + b^2 - e^2}{2 \cdot a \cdot b}$

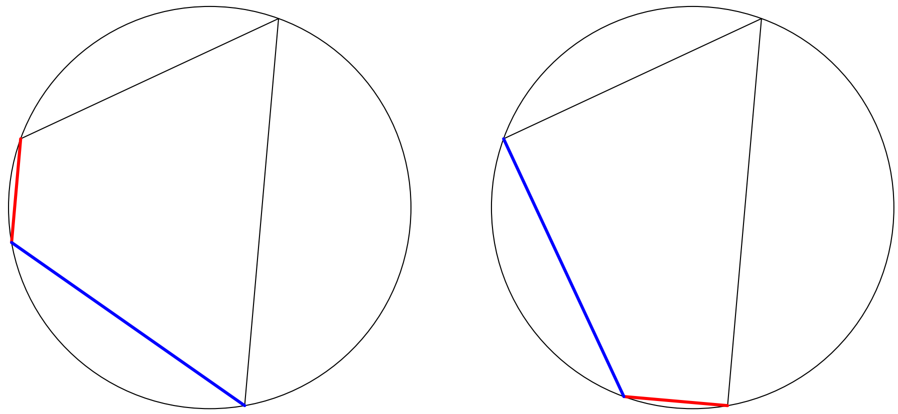
und andererseits $\cos\sigma = \frac{e^2 - c^2 - d^2}{2 \cdot c \cdot d}$, woraus $\boxed{e = \sqrt{\frac{\tau_c \cdot \tau_d}{\tau_b}}}$ folgt.

(Die andere Diagonale hat die Länge $\boxed{f = \sqrt{\frac{\tau_b \cdot \tau_c}{\tau_d}}}$; hieraus folgt $\boxed{e \cdot f = \tau_c}$ („Satz des *PTOLEMÄUS*[1]").

Ist das Sehnenviereck ein <u>Rechteck</u> (mit $a = c$ und $b = d$), so verläuft e durch den Kreismittelpunkt, und es gilt $e^2 = \frac{\tau_c \cdot \tau_d}{\tau_b} = a^2 + b^2$ (*PYTHAGORAS*).

Wenn man zwei benachbarte Seiten miteinander vertauscht (etwa c und d), ändert sich der Flächeninhalt nicht; man bekommt aber die *dritte Diagonale* mit der Länge $\boxed{g = \sqrt{\frac{\tau_b \cdot \tau_d}{\tau_c}}}$.

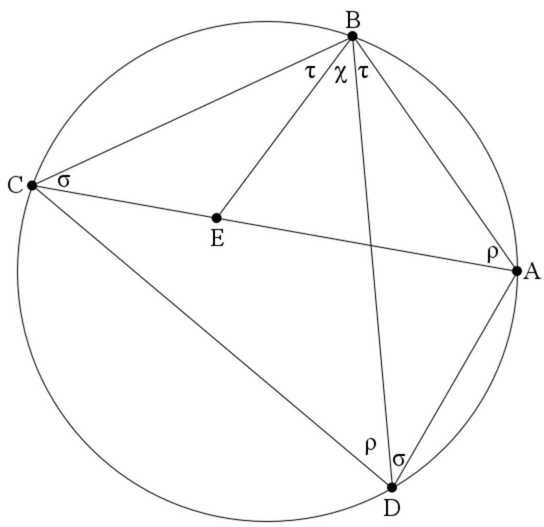
[1] Namensgeber des ptolemäischen Weltbilds, wonach sich die Sonne um die Erde dreht.



Das Produkt der drei Diagonalen beträgt $e \cdot f \cdot g = \sqrt{\tau_b \cdot \tau_c \cdot \tau_d}$.

Nun ist $e \cdot f = \tau_c$ und analog $f \cdot g = \tau_b$ sowie $g \cdot e = \tau_d$.

Ein **anderer Beweis** des Satzes von PTOLEMÄUS verläuft unter mehrfacher Verwendung des Umfangswinkelsatzes wie folgt:
Man konstruiere E wie in der Skizze, indem man den Winkel τ in B an BC anträgt.



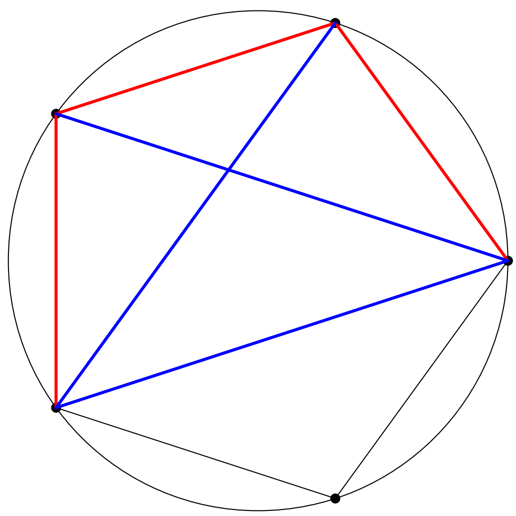
Die Dreiecke CEB und DAB sind zueinander ähnlich.
Daher ist $AD \cdot BC = BD \cdot CE$.

Auch die Dreiecke CDB und EAB sind zueinander ähnlich, daher ist $AB \cdot CD = BD \cdot EA$.

Daher ist

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = BD \cdot (EA + CE) = BD \cdot AC.$$

Ein ***regelmäßiges Fünfeck*** (mit den (roten) Seitenlängen a und den (blauen)Diagonalenlängen d) ist insbesondere ein Sehnenviereck.



Nach PTOLEMÄUS ist dann

$$a \cdot d + a^2 = d^2$$

bzw.

$$\left(\frac{d}{a}\right)^2 = \frac{d}{a} + 1.$$

Damit ist $\frac{d}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Goldener Schnitt).

Das ***regelmäßige Sechseck*** ist ebenfalls ein Sehnenviereck. Es hat die (roten) Seitenlängen a, die Länge d der (grünen) langen Diagonale und die Länge k der (blauen) kurzen Diagonale. Aufgrund des Cosinussatzes ist

$$k^2 = 2\cdot a^2 - 2\cdot a^2\cdot\cos 120° = 3\cdot a^2,$$

also

$$k = a\cdot\sqrt{3},$$

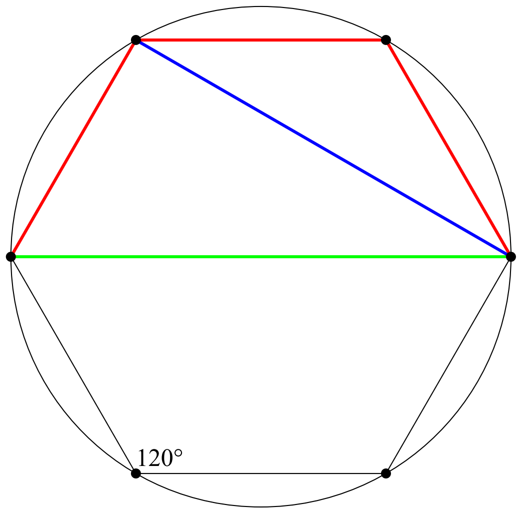
und nach Ptolemäus ist

$$d\cdot a + a^2 = k^2$$

und damit

$$d = 2\cdot a,$$

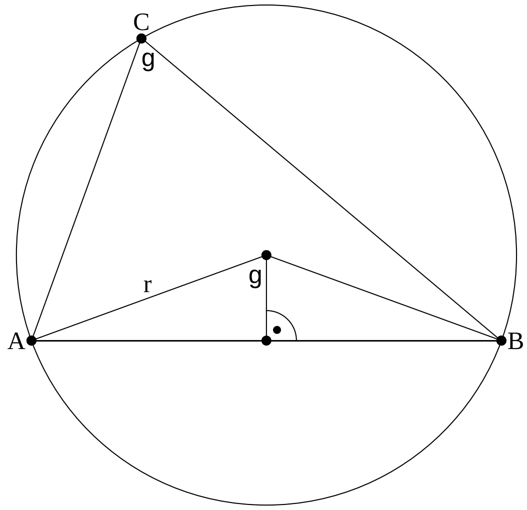
was man sich auch gleich hätte denken können.



Der Satz des PTOLEMÄUS lädt auch zu einer ***Erweiterung des Additionstheorems des Sinus*** ein[2]; nämlich zu einer Erweiterung von

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha.$$

Nach dem Peripheriewinkelsatz kann man jede Sehnenlänge durch den zugehörigen eingeschlossenen Winkel ausdrücken; es ist nämlich $\boxed{AB = 2\cdot r\cdot\sin\gamma}$.

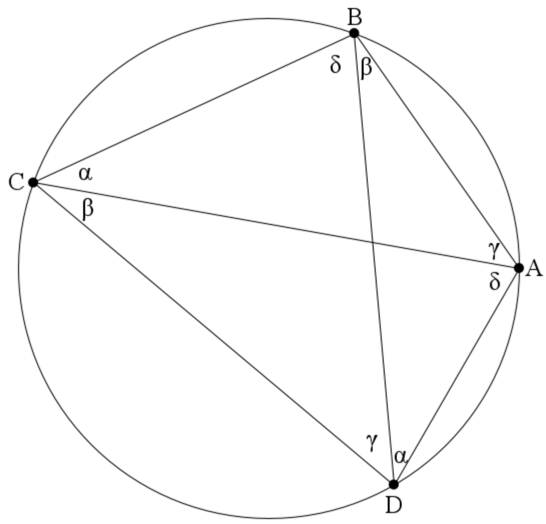


Drückt man die PTOLEMÄUS-Beziehung

$$AB\cdot CD + AD\cdot BC = BD\cdot(EA+CE) = BD\cdot AC$$

durch Winkel aus, ergibt sich die für $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 180°$ richtige Beziehung

$$\boxed{\sin\alpha\cdot\sin\delta + \sin\beta\cdot\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha+\gamma)}.$$



Ist $\alpha+\gamma = 90° = \beta+\delta$, geht also CA durch den Umkreismittelpunkt, bekommt man die vertraute Formel

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha = \sin(\alpha+\beta).$$

[2] I. M. Gelfand / M. Saul: Trigonometry: 2001 Boston: Birkhäuser.