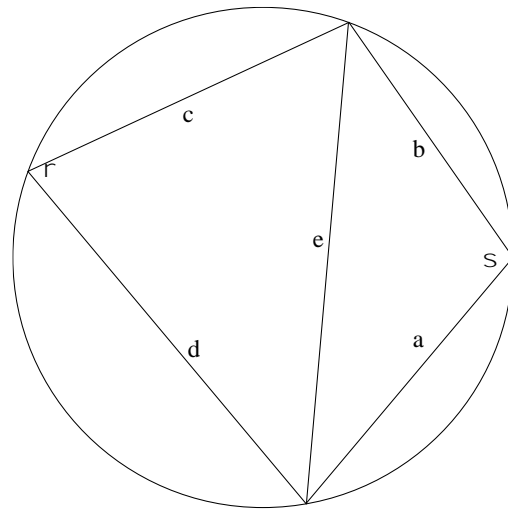


Zum (konvexen) Sehnenviereck, dem Satz des PTOLEMÄUS und weiteren Eigenschaften

Da sich in einem Sehnenviereck die Gegenwinkel zu 180° ergänzen, ist $\rho = 180^\circ - \sigma$.

Es sei

$$\begin{aligned}\tau_b &= a \cdot b + c \cdot d \\ \tau_c &= a \cdot c + b \cdot d \\ \tau_d &= a \cdot d + b \cdot c\end{aligned}$$



Wegen $e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \sigma$ und $e^2 = c^2 + d^2 + 2 \cdot c \cdot d \cdot \cos \sigma$ ist einerseits $\cos \sigma = \frac{a^2 + b^2 - e^2}{2 \cdot a \cdot b}$

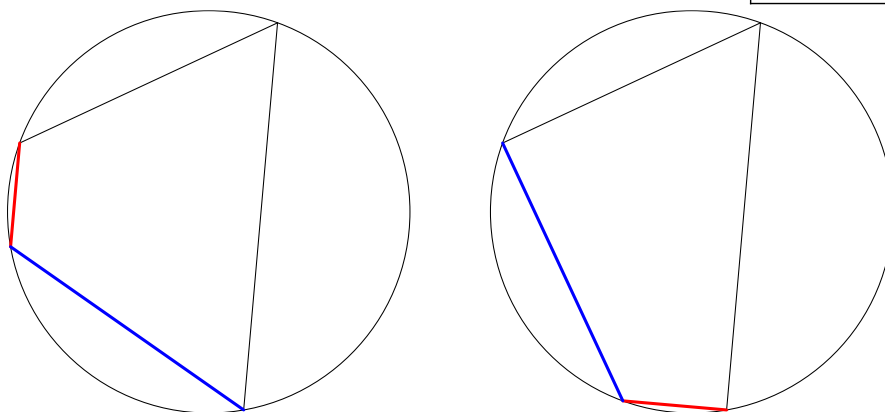
und andererseits $\cos \sigma = \frac{e^2 - c^2 - d^2}{2 \cdot c \cdot d}$, woraus $e = \sqrt{\frac{\tau_c \cdot \tau_d}{\tau_b}}$ folgt.

(Die andere Diagonale hat die Länge $f = \sqrt{\frac{\tau_b \cdot \tau_c}{\tau_d}}$; hieraus folgt $e \cdot f = \tau_c$ („Satz des PTOLEMÄUS¹“).

Ist das Sehnenviereck ein Rechteck (mit $a = c$ und $b = d$), so verläuft e durch den Kreismittelpunkt, und es gilt $e^2 = \frac{\tau_c \cdot \tau_d}{\tau_b} = a^2 + b^2$ (PYTHAGORAS).

Wenn man zwei benachbarte Seiten miteinander vertauscht (etwa c und d), ändert sich der

Flächeninhalt nicht; man bekommt aber die *dritte Diagonale* mit der Länge $g = \sqrt{\frac{\tau_b \cdot \tau_d}{\tau_c}}$.



Das Produkt der drei Diagonalen beträgt $e \cdot f \cdot g = \sqrt{\tau_b \cdot \tau_c \cdot \tau_d}$.

Nun ist $e \cdot f = \tau_c$ und analog $f \cdot g = \tau_b$ sowie $g \cdot e = \tau_d$.

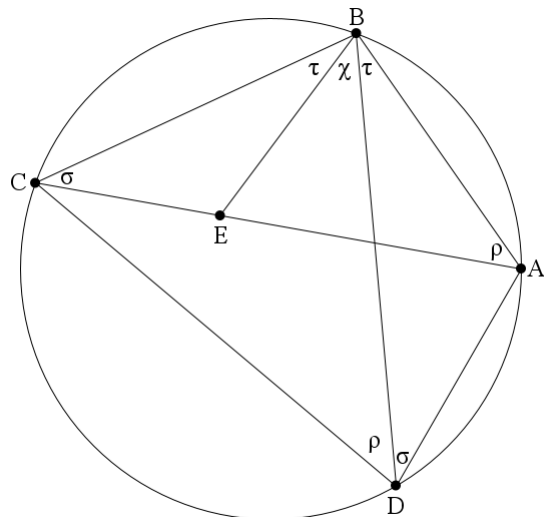
¹ Namensgeber des ptolemäischen Weltbilds, wonach sich die Sonne um die Erde dreht.

Ein **anderer Beweis** des Satzes von PTOLEMÄUS verläuft unter mehrfacher Verwendung des Umfangswinkelsatzes wie folgt:
 Man konstruiere E wie in der Skizze, indem man den Winkel τ in B an BC anträgt.

Die Dreiecke CEB und DAB sind zueinander ähnlich.
 Daher ist $AD \cdot BC = BD \cdot CE$.

Auch die Dreiecke CDB und EAB sind zueinander ähnlich, daher ist $AB \cdot CD = BD \cdot EA$.

Daher ist
 $AB \cdot CD + AD \cdot BC = BD \cdot (EA + CE) = BD \cdot AC$.



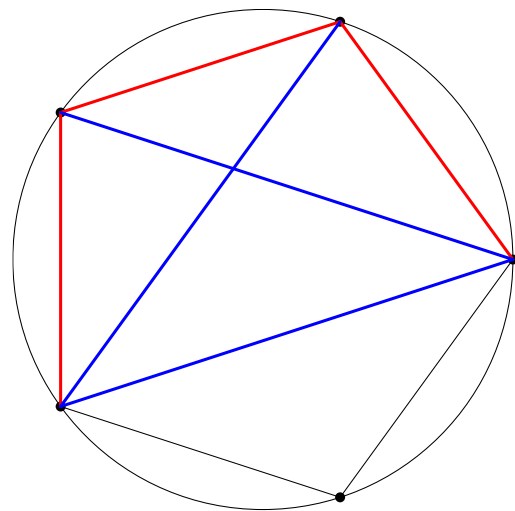
Ein **regelmäßiges Fünfeck** (mit den (roten) Seitenlängen a und den (blauen) Diagonalenlängen d) ist insbesondere ein Sehnenviereck.

Nach PTOLEMÄUS ist dann
 $a \cdot d + a^2 = d^2$

bzw.

$$\left(\frac{d}{a}\right)^2 = \frac{d}{a} + 1.$$

Damit ist $\frac{d}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (Goldener Schnitt).



Das **regelmäßige Sechseck** ist ebenfalls ein Sehnenviereck. Es hat die (roten) Seitenlängen a , die Länge d der (grünen) langen Diagonale und die Länge k der (blauen) kurzen Diagonale. Aufgrund des Cosinussatzes ist

$$k^2 = 2 \cdot a^2 - 2 \cdot a^2 \cdot \cos 120^\circ = 3 \cdot a^2,$$

also

$$k = a \cdot \sqrt{3},$$

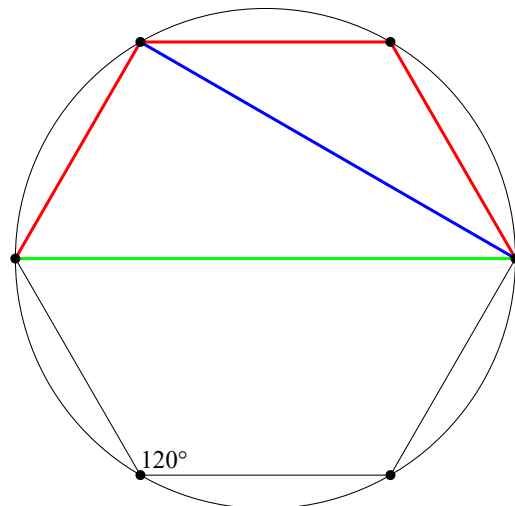
und nach Ptolemäus ist

$$d \cdot a + a^2 = k^2$$

und damit

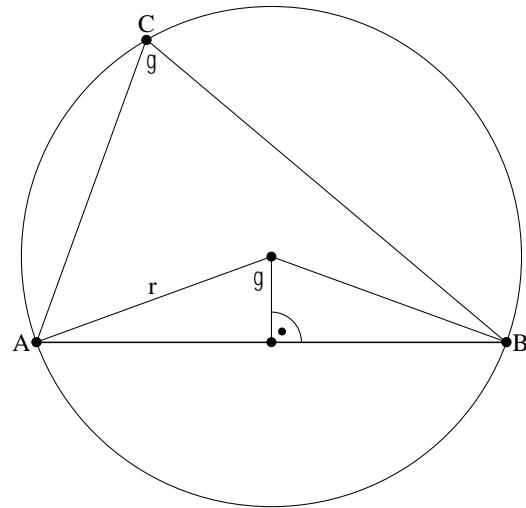
$$d = 2 \cdot a,$$

was man sich auch gleich hätte denken können.



Der Satz des PTOLEMÄUS läßt auch zu einer **Erweiterung des Additionstheorems des Sinus** ein²; nämlich zu einer Erweiterung von $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$.

Nach dem Peripheriewinkelsatz kann man jede Sehnenlänge durch den zugehörigen eingeschlossenen Winkel ausdrücken; es ist nämlich $AB = 2 \cdot r \cdot \sin\gamma$.

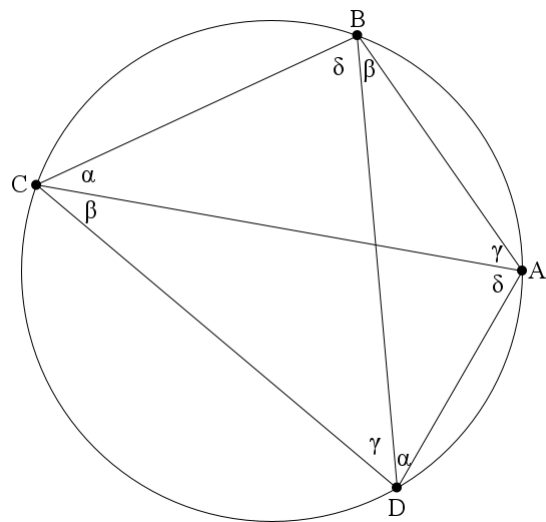


Drückt man die PTOLEMÄUS-Beziehung $AB \cdot CD + AD \cdot BC = BD \cdot (EA + CE) = BD \cdot AC$ durch Winkel aus, ergibt sich die für $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$ richtige Beziehung

$$\sin\alpha \cdot \sin\delta + \sin\beta \cdot \sin\gamma = \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha + \gamma).$$

Ist $\alpha + \gamma = 90^\circ = \beta + \delta$, geht also CA durch den Umkreismittelpunkt, bekommt man die vertraute Formel

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha = \sin(\alpha + \beta).$$



Ergänzung zum vollständigen Vierseit

Sind bei einem Sehnenviereck ABCD keine zwei Gegenseiten zueinander parallel, so lässt es sich durch E und F zu einem vollständigen Vierseit ergänzen.

Die blauen Winkel haben alle die gleiche Größe α .

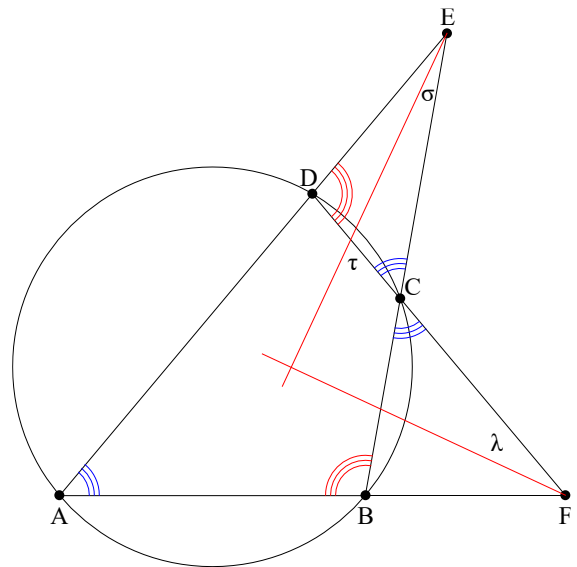
Auch die roten Winkel haben alle die gleiche Größe β .

Die roten Geraden sind Winkelhalbierende.

Dann ist $\sigma = 90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}$, $\tau = \sigma + \alpha$ und

$$\lambda = \frac{180^\circ - (180^\circ - \beta) - \alpha}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2}. \text{ Hieraus folgt}$$

$\lambda + \tau = 90^\circ$. Daher stehen die beiden Winkelhalbierenden aufeinander senkrecht.



² I. M. Gelfand / M. Saul: Trigonometry: 2001 Boston: Birkhäuser.