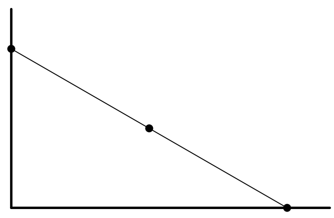
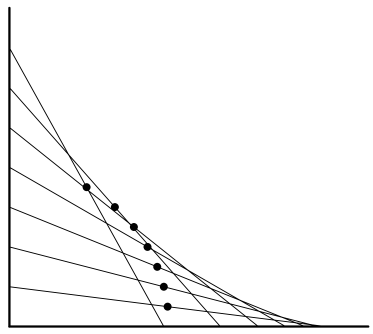
Jörg MEYER, Hameln August 2023

Zur rutschenden Leiter

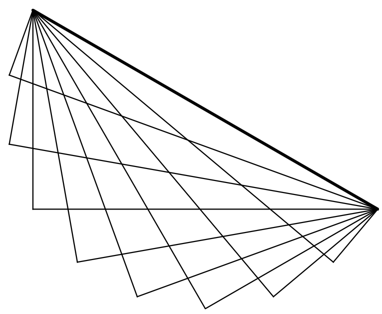
Eine Leiter rutscht eine Hauswand hinab, und zwar so, dass das obere Leiterende stets die Wand und das untere Leiterende stets den Erdboden berührt.

Welche Kurve beschreibt der Mittelpunkt der Leiter?
Es sieht so aus, als wenn sich der Mittelpunkt auf einem Viertel-Kreis bewegt. Er ist anders gekrümmt, als man zunächst vermuten mag, und hat seinen Mittelpunkt offenbar in der Haus-Ecke.
Warum ist das so?

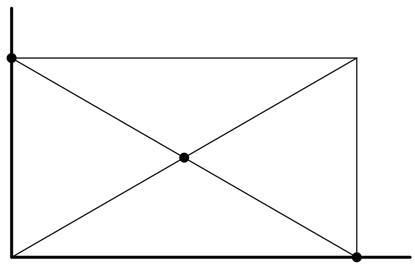




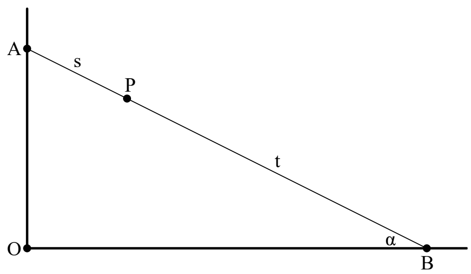
<u>Lösung I</u>:
Man stellt sich die Leiter als ruhend vor und Fußboden und Hauswand als beweglich.
Dann liegt die Ecke zwischen Hauswand und Erdboden auf dem Thales-Kreis über der Leiter.
Daher ist der Abstand zwischen Haus-Ecke und Leiter-Mittelpunkt konstant.



<u>Lösung II</u>:
Man ergänzt die Konstellation aus Hauswand, Erdboden und Leiter zu einem Rechteck. Dessen Diagonalen halbieren einander und haben gleiche Länge.
Daher ist der Abstand zwischen Haus-Ecke und Leiter-Mittelpunkt konstant.



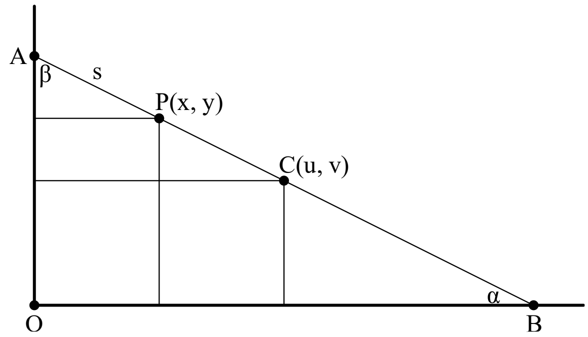
Welche Kurve beschreibt ein ***beliebiger*** Punkt P auf der Leiter?
Der Erdboden sei OB, die Hauswand OA und die Leiter AB.
Die Leiter habe die Länge 1.
O sei Ursprung des Koordinatensystems.
Ferner sei $|AP| = s;\ |PB| = t$.



<u>Lösung 1</u>: Wegen $A = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ ist $P = t \cdot A + s \cdot B = \begin{pmatrix} s \cdot \cos\alpha \\ t \cdot \sin\alpha \end{pmatrix}$. P beschreibt also eine Ellipse.

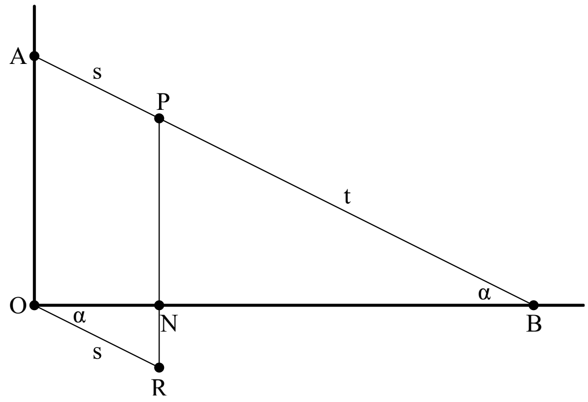
<u>Lösung 2</u>: Mit C als Leiter-Mittelpunkt ist $\sin\beta = \frac{x}{s} = \frac{u}{1/2}$, $\sin\alpha = \frac{y}{t} = \frac{v}{1/2}$. Wegen $u^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ folgt die Ellipsengleichung

$$\left(\frac{x}{s}\cdot\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{t}\cdot\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

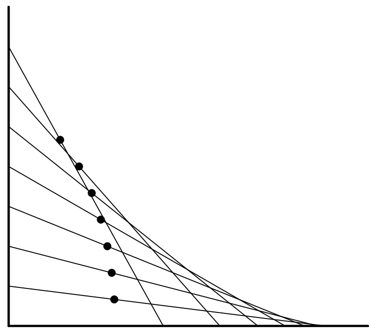


<u>Lösung 3</u>: Man konstruiere R so, dass OR parallel zu AP und PR parallel zu OA ist.
R bewegt sich auf einem Teilkreis um O mit dem Radius s und hat die Form $R = \begin{pmatrix} ON \\ NR \end{pmatrix} = s\cdot\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}$. Wegen $\sin\varphi = \frac{NP}{t} = \frac{NR}{s}$ ist

$$P = \begin{pmatrix} ON \\ NP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\cdot\cos\alpha \\ \frac{t}{s}\cdot(-s\cdot\sin\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\cdot\cos\alpha \\ -t\cdot\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

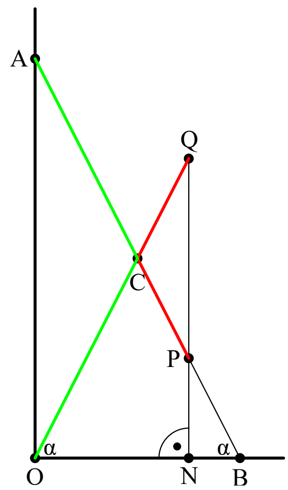


P bewegt sich daher auf einem gestauchten Kreis, also auf einer Ellipse.

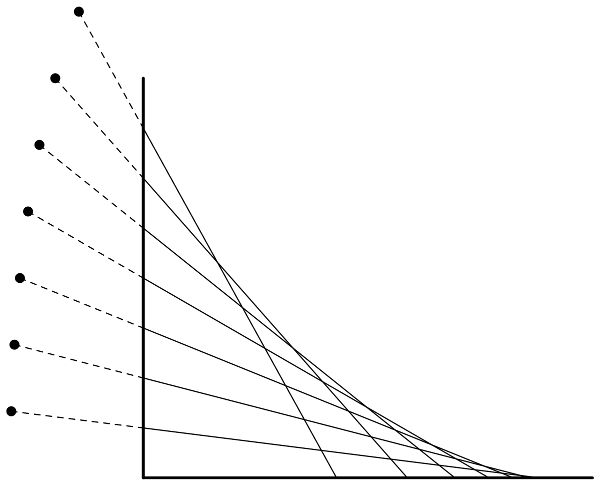


<u>Lösung 4</u>: Man weiß, dass sich der Mittelpunkt C der Leiter auf einem Kreis um O mit dem Radius $\frac{1}{2}$ bewegt; die grünen Strecken haben gleiche Länge.
Q liege auf der Verlängerung von OC mit $CQ = CP$. Auch die roten Strecken haben gleiche Länge.
Man sieht, dass $OQ = \text{rot} + \text{grün} = AP = s$ ist. Q liegt daher auf einem Kreis um O mit dem Radius s und hat die Form $Q = \begin{pmatrix} ON \\ NQ \end{pmatrix} = s\cdot\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$.

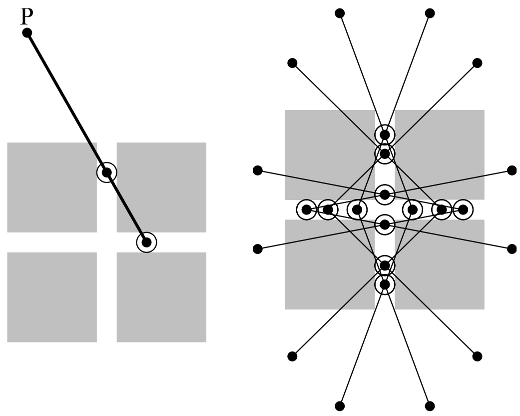
Wegen $\sin\alpha = \frac{NP}{t} = \frac{NQ}{s}$ ist $P = \begin{pmatrix} ON \\ NP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\cdot\cos\alpha \\ t\cdot\sin\alpha \end{pmatrix}$.



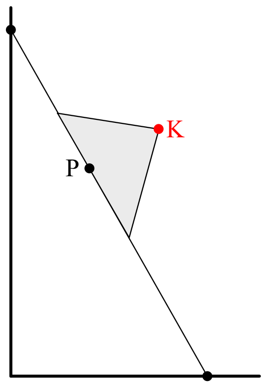
Offenbar können s und t negativ sein, d.h. der Punkt P kann auch auf der Verlängerung außerhalb der Leiter liegen.



Dies ist dass Grundprinzip des ***Ellipsographen*** nach Archimedes:
An einer Stange sind fest zwei Rädchen angebracht, die sich in den weißen Aussparungen bewegen können, so dass die Stange verschiedene Positionen einnehmen kann.
Dann beschreibt das Stangen-Ende P eine Ellipse.
Deren Form ändert sich, wenn die Position von P oder die Position der Rädchen variiert wird.



Was passiert, wenn mit der Leiter ein fester Punkt K ***außerhalb*** der Leiter verbunden ist?
(Man kann sich etwa vorstellen, dass mit der Leiter ein Dreieck mit der Spitze K, deren Lotfußpunkt P ist, fest verbunden ist.) Der Abstand zwischen K und der Leiter sei q.



Lösung A:

Mit Leiterlänge $L=1$ und $A=\begin{pmatrix}0\\ \lambda\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}\mu\\ 0\end{pmatrix}$ mit $\mu=\sqrt{1-\lambda^2}$ ist $P=\begin{pmatrix}s\cdot\mu\\ t\cdot\lambda\end{pmatrix}$.

Dann ist $K=\begin{pmatrix}s\cdot\mu\\ t\cdot\lambda\end{pmatrix}+q\cdot\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, also

$$x=s\cdot\mu+q\cdot\lambda;\ y=q\cdot\mu+t\cdot\lambda\ .$$

Dies LGS hat für $N:=s\cdot t-q^2\neq 0$ die Lösungen $\lambda=\frac{s\cdot y-q\cdot x}{N};\ \mu=\frac{t\cdot x-q\cdot y}{N}$.

Wegen $\lambda^2+\mu^2=1$ und $s+t=1$ hat man dann die Gleichung

$$x^2\cdot(t-N)+y^2\cdot(s-N)-2\cdot x\cdot y\cdot q=N^2\,.$$

Es handelt sich um eine quadratische Kurve, also um einen Kegelschnitt.

Da weder x noch y beliebig groß werden können, handelt es sich um eine ***Ellipse***, was man auch wie folgt einsehen kann: Homogenisierung und Schnitt mit der Ferngeraden liefert mit $u=\frac{x}{y}$ die Gleichung $u^2-2\cdot u\cdot\frac{q}{t-N}+\frac{s-N}{t-N}=0$ und unter Beachtung von $s+t=1$ die Lösung

$$u=\frac{q}{t-N}\pm\sqrt{\frac{q^2-(s-N)\cdot(t-N)}{(t-N)^2}}=\frac{q\pm\sqrt{q^2-s\cdot t+N-N^2}}{t-N}=\frac{q\pm\sqrt{-N^2}}{t-N}$$

Es gibt für $q^2\neq s\cdot t$ mit der Ferngeraden keine reellen Schnittpunkte, so dass es sich um eine ***Ellipse*** handelt.

Im oben nicht behandelten Fall $q^2=s\cdot t$ hat man wegen

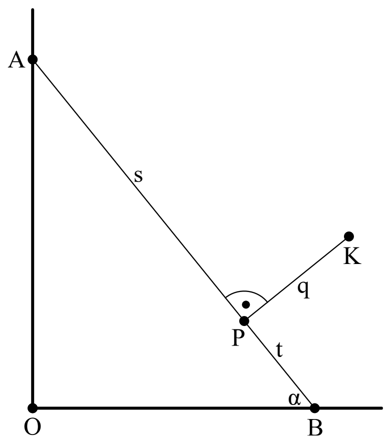
$$K=\begin{pmatrix} s\cdot\mu \\ t\cdot\lambda \end{pmatrix}+q\cdot\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{q^2}{t}\cdot\mu \\ t\cdot\lambda \end{pmatrix}+q\cdot\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{q}{t}\cdot(q\cdot\mu+t\cdot\lambda) \\ t\cdot\lambda+q\cdot\mu \end{pmatrix}$$ eine ***Ursprungs-Strecke***.

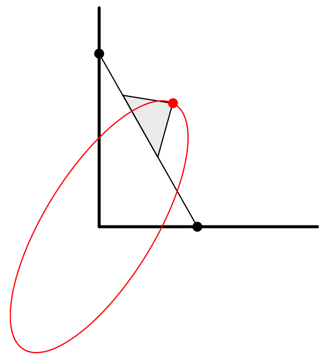
<u>Lösung B</u>: Es war $P=\begin{pmatrix} s\cdot\cos\alpha \\ t\cdot\sin\alpha \end{pmatrix}$. Mit

$$A-B=\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\alpha \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

ist

$$K=\begin{pmatrix} s\cdot\cos\alpha \\ t\cdot\sin\alpha \end{pmatrix}+q\cdot\begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$
$$=\cos\alpha\cdot\begin{pmatrix} s \\ q \end{pmatrix}+\sin\alpha\cdot\begin{pmatrix} q \\ t \end{pmatrix}$$





Man bekommt also eine gedrehte Ellipse. Das Bild zeigt die Kurve und die beiden Basisvektoren $\begin{pmatrix} s \\ q \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} q \\ t \end{pmatrix}$.

Diese sind kollinear für $N=s\cdot t-q^2=0$.