Dr. Jörg Meyer, Hameln
24. 6. 2020

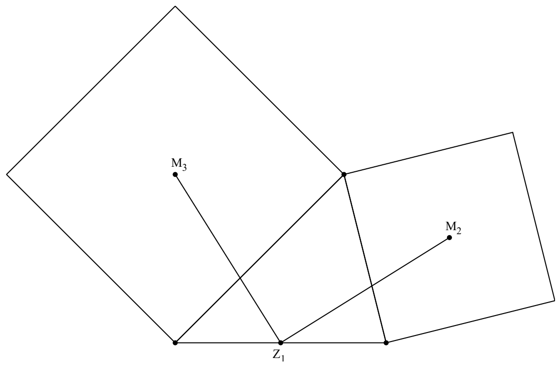
Zur Nützlichkeit kongruenter Dreiecke

Vorbemerkung

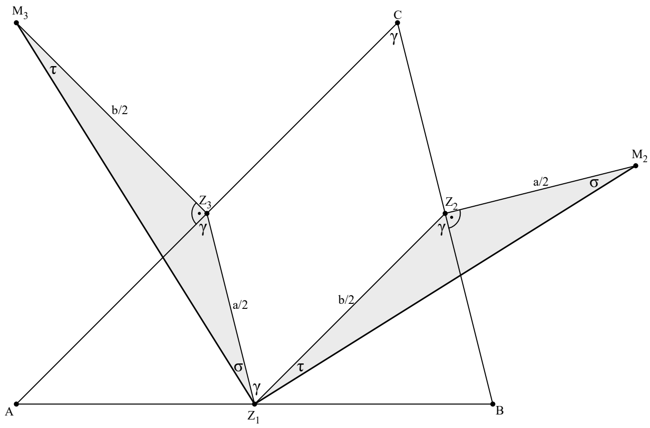
Es gibt zwar mehrere geometrische Sachverhalte, die sich mit Hilfe zueinander ähnlicher Dreiecke beweisen lassen, aber Beweise mit Hilfe zueinander kongruenter Dreiecke sind merkwürdigerweise selten.
Hier werden einige überraschende und schöne Sachverhalte präsentiert, deren Beweise mit zueinander kongruenten Dreiecken recht durchsichtig werden.

Ein nützliches Lemma

Errichtet man über zwei Dreiecksseiten Quadrate, so sind die Verbindungsstrecken zwischen den Quadratmittelpunkten und dem Mittelpunkt der dritten Dreiecksseite gleichlang und zueinander orthogonal; die Punkte M_3, Z_1, M_2 bilden also ein halbes Quadrat.
Dieser Satz wird zwar nach FINSLER und HADWIGER benannt, war jedoch schon Joseph NEUBERG (1840 -1926) bekannt[1].



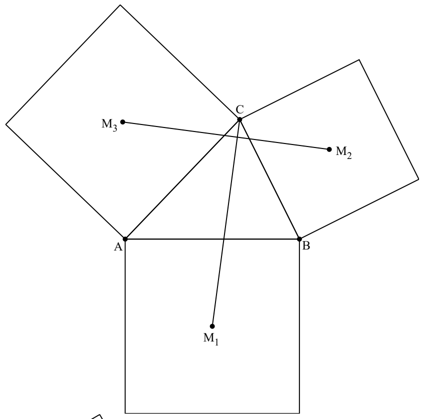
Zum Beweis:
Der Winkel γ bei Z_1 erklärt sich aus der Winkelsumme in $Z_1Z_2CZ_3$.
Im Dreieck $Z_1M_2Z_2$ ist $\sigma+\tau = 90°-\gamma$.
Die beiden getönten Dreiecke sind somit zueinander kongruent.
Daher sind M_3Z_1 und Z_1M_2 gleich lang, und wegen $\sigma+\tau+\gamma = 90°$ stehen sie aufeinander senkrecht.

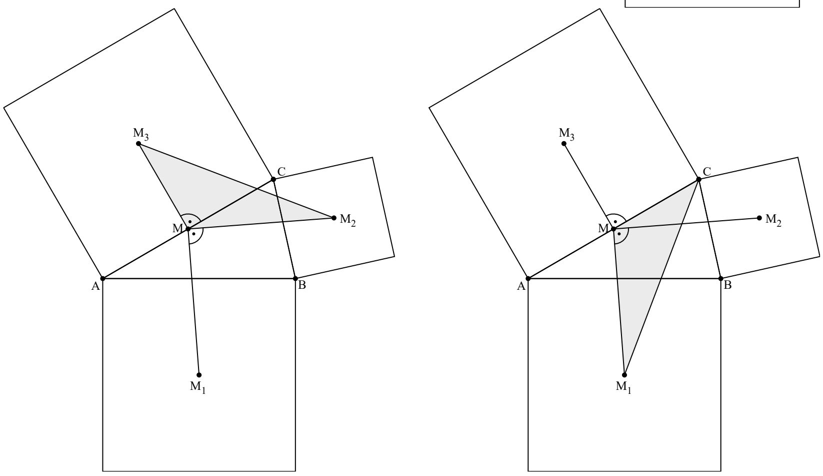


[1] Neuberg J. (1878): Quelques propriétés du triangle. In: *Nouvelle Correspondance de Mathématiques* IV, 142-145, n° 4; insbesondere S. 143. In diesem Aufsatz finden sich weitere Eigenschaften dieser Konfiguration.

Quadrate über Dreiecksseiten

Errichtet man Quadrate über den drei Dreiecksseiten und betrachtet deren Mittelpunkte M_1, M_2 und M_3, so lässt sich mit Hilfe eines Geometrieprogramms entdecken, dass die Strecken M_2M_3 und CM_1 gleich lang sind und aufeinander senkrecht stehen.



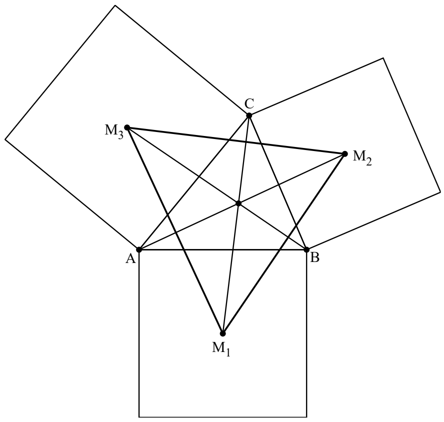


M ist der Mittelpunkt von AC. Nach dem Lemma sind MM_2 und MM_1 gleichlang und zueinander orthogonal.
Die beiden getönten Dreiecke sind zueinander kongruent, Daher sind CM_1 und M_2M_3 gleich lang. Sie gehen durch eine Drehung um 90° auseinander hervor.

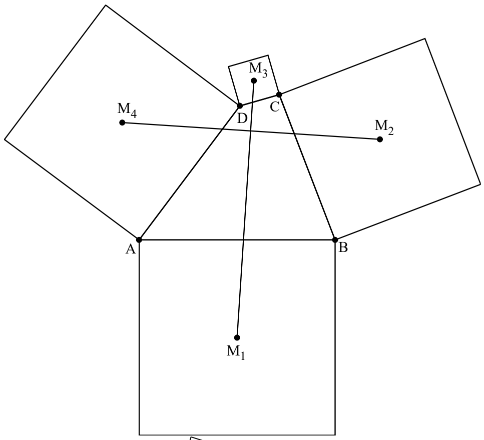
Als Folgerung ergibt sich, dass AM_2, BM_3 und CM_1 kopunktal sind, was man ohne den Vorspann so schnell gar nicht sehen würde. Der Grund liegt auf der Hand: Die drei Ecktransversalen sind die Höhen von $M_1M_2M_3$.

Der Schnittpunkt heißt äußerer VECTEN-Punkt. Er ist nach einem französischen Mathematiker benannt, von dem man kaum etwas weiß; selbst sein Vorname ist nicht bekannt.

Analog könnte man auch die Quadrate nach innen errichten, bekommt dann jedoch eine recht unübersichtliche Figur.



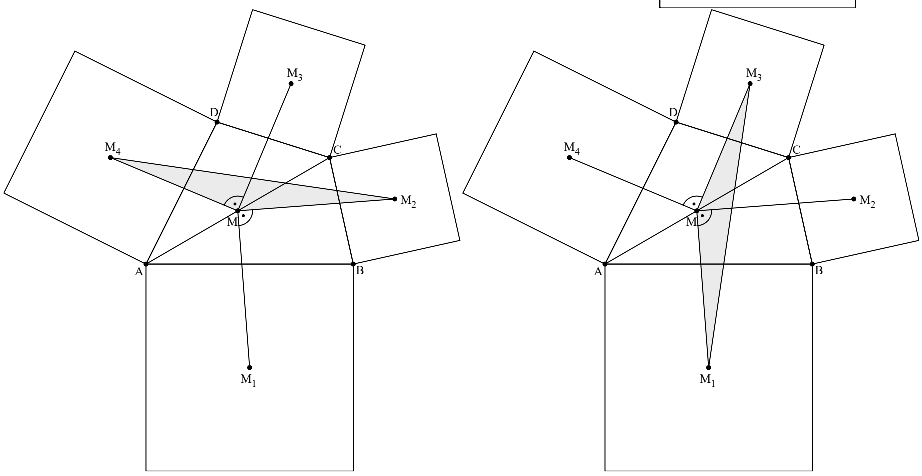
Quadrate über Vierecksseiten



Die erste Aussage über Dreiecke ist nicht ganz symmetrisch. Man bekommt eine „symmetrischere“ Aussage, wenn man das Dreieck ABC zu einem Viereck ABCD erweitert. Dann gilt nämlich, dass die Strecken M_1M_3 und M_2M_4 gleich lang sind und aufeinander senkrecht stehen. (Wandert D auf C zu, so wandert M_3 auch auf C zu.)

Diese Aussage ist nach HENRICUS HUBERTUS VAN AUBEL (1830-1906) benannt[2].

Sie ist für ganz beliebige Vierecke gültig.



Wieder ist M der Mittelpunkt von AC. Die beiden getönten Dreiecke sind zueinander kongruent, daher sind die Strecken M_1M_3 und M_2M_4 gleich lang. Nach Konstruktion gehen die beiden Dreiecke durch eine Drehung um 90° auseinander hervor.

[2] H. H. van Aubel (1878): Note concernant les centres de carrés construits sur les côtés d'un polygon quelconque. In: *Nouvelle Correspondance Mathématique* 4, 40-44.