Jörg MEYER, Hameln

Zum Satz des Pythagoras[1]

Abstract:

Zwei ungewöhnliche Beweise zum Satz des Pythagoras werden vorgestellt. Der eine ergibt sich organisch aus den üblichen in Klasse 9 angestellten Irrationalitätsbetrachtungen, der andere benutzt den Satz des Thales. Beide Beweise orientieren sich an dem Hauptanwendungsproblem, Längen von Strecken bestimmen zu wollen.

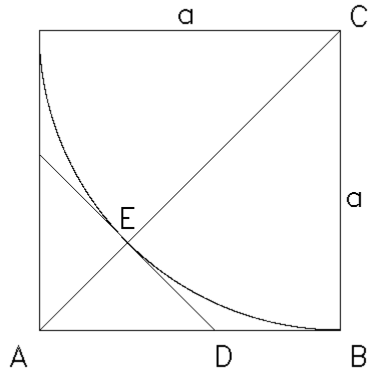
> „Zeige ich Ihnen hier also das Modell meines Unternehmens, weil es mir ziemlich gut gefallen hat, so bedeutet dies nicht, als wollte ich irgend jemandem raten, es nachzuahmen."
>
> Descartes, Discours de la méthode II,3 (1637).

0. Einleitung

Zum Satz des Pythagoras gibt es unzählig viele Beweise. Warum also noch zwei weitere?
Nach Durchsicht mehrerer gängiger Schulbücher kommt man zu der betrüblichen Einsicht, daß ein problemorientierter Zugang zum Pythagoras nicht zu existieren scheint. Immer stehen irgendwelche Flächenverwandlungen im Vordergrund, die dann einen Satz abwerfen, den nur der Lehrer anstrebt und den kein Schüler sucht. Meist erst in einer späteren Jahrgangsstufe wird dann dieser unverstandene Satz dazu benutzt, um Abstände zwischen Punkten zu berechnen (dieses Problem ist die Hauptanwendung des Pythagoras!); Flächenverwandlungen treten nie wieder auf.
Anstatt nun immer wieder neu das Pferd von hinten aufzuzäumen, werden hier Zugänge präsentiert, die sich von Anfang an an dem Abstandsproblem orientieren. Flächenverwandlungen spielen in den folgenden Ausführungen gar keine Rolle.
Der erste Zugang entwickelt sich als Anschlußproblem bei dem Nachweis, daß $\sqrt{2}$ irrational ist.
Der zweite Zugang zeigt, wie man einen der gängigen Beweise problemorientiert unterrichten kann.
Der dritte Zugang schließlich benutzt als Haupthilfsmittel den Satz des Thales.
Alle drei Zugänge sind natürlich voneinander unabhängig. Für den Unterricht müssen sie noch methodisch aufbereitet werden (beispielsweise fängt man mit konkreten Zahlen an).

1. Irrationale Zahlen und Pythagoras

Einer der bekannten Beweise, daß $\sqrt{2}$ irrational ist, orientiert sich an der folgenden Figur:



Es sei $d := CA$ die Diagonalenlänge.

Nun ist AD die Diagonale eines kleineren Quadrats mit der Seitenlänge AE. Es ist $AE = d - a$; ferner gilt $AE = ED = DB$. Somit ist $AD = a - DB = a - (d - a) = 2 \cdot a - d$.

[1] Erschien in: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht **50** (2), S. 76 - 79 (1997).

	Seitenlänge	Diagonalenlänge
Großes Quadrat	a	d
Kleines Quadrat	$d-a$	$2\cdot a-d$

Das Verhältnis Diagonalenlänge zu Seitenlängen ist in beiden Quadraten dasselbe;

also gilt

$$\frac{d}{a}=\frac{2\cdot a-d}{d-a}. \qquad (*)$$

(Hierzu muß der Begriff der Ähnlichkeit nicht vorher thematisiert worden sein; er kann sogar bei diesen Betrachtungen abfallen.)

Aus (*) lassen sich mehrere Schlüsse ziehen:

1. Wenn $\frac{d}{a}$ eine rationale Zahl ist, so ist sie wertgleich zu einem anderen Bruch mit kleinerem Nenner. Da sich (*) beliebig oft iterieren läßt, kommt man so zu einem Widerspruch.

2. (*) bedeutet, daß man die Seiten $a=a_{n+1}$ und $d=d_{n+1}$ des großen Dreiecks durch die Seiten $a'=a_n$ und $d'=d_n$ des kleinen Dreiecks ersetzen kann:

$$\left\{\begin{matrix} a_n=d_{n+1}-a_{n+1} \\ d_n=2\cdot a_{n+1}-d_{n+1} \end{matrix}\right\}.$$

Kehrt man diese Ersetzung um, so führt die entstehende Transformation

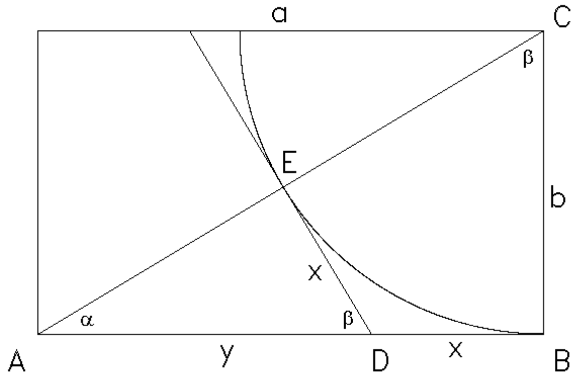
$$\left\{\begin{matrix} a_{n+1}=d_n+a_n \\ d_{n+1}=d_n+2\cdot a_n \end{matrix}\right\}$$

zu einem <u>Berechnungsverfahren</u> für $\frac{d}{a}\left(=\sqrt{2}\right)$, das auf <u>Theon von Smyrna</u> (ca. 100 n. Chr.) zurückgeht.

3. Die Gleichung (*) läßt sich in $d^2=2\cdot a^2$ umwandeln. Wenn man $\sqrt{2}$ „kennt“, kann man die Diagonalenlänge d des großen Quadrats berechnen.

Naheliegende Frage: Kann man auf ähnliche Art auch die Diagonale eines allgemeinen Rechtecks berechnen?

Die entsprechende Figur ist



Wieder sei $d:=AC$ die Diagonalenlänge.

Wie im quadratischen Fall ist die Strecke AD Diagonale eines kleineren Rechtecks mit den Seitenlängen AE und x sowie der Diagonalen y.

Die Dreiecke ABC und AED haben die „gleiche Form“.

	große Seite	kleine Seite	Diagonale
Großes Dreieck	a	b	d
Kleines Dreieck	$d-b$	$x=\frac{b}{a}\cdot(d-b)$	$y=\frac{d}{a}\cdot(d-b)$

Nun muß natürlich $y+x=a$ sein.

Setzt man ein, so ergibt sich

$$\frac{b}{a}\cdot(d-b)+\frac{d}{a}\cdot(d-b)=a$$

und nach einer leichten Umformung

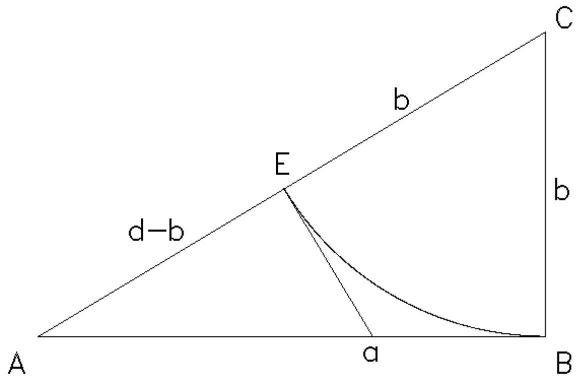
$$d^2=a^2+b^2.$$

Bemerkungen:

1. Auch die zum rechteckigen Fall gehörige Tabelle können Schüler erstellen, ohne daß dazu vorher der Begriff der Ähnlichkeit explizit behandelt werden muß. Ich habe die Erfahrung gemacht, daß Schüler im Anschluß an diese Überlegungen die üblichen Strahlensatzaufgaben gut lösen konnten, nicht indem sie die Strahlensätze falsch anwendeten, sondern indem sie von vornherein formgleiche Dreiecke suchten.

2. Wie beim quadratischen Fall kann man aus den dargestellten Überlegungen ein Berechnungsverfahren für Wurzeln abzuleiten; es bringt aber gegenüber dem quadratischen Fall nichts Neues.

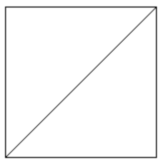
3. Sollte man den Sehnen–Tangentensatz zur Verfügung haben, so folgt aus der Figur



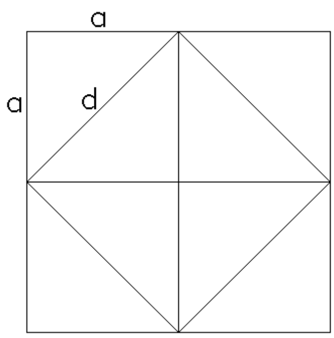
sofort $a^2=(d-b)\cdot(d+b)$.

2. Ein klassischer Weg

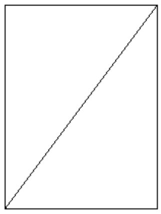
Wie lang ist die Diagonale eines Rechtecks?
Heuristische Strategie: Mit dem Einfachsten beginnen, also mit dem Quadrat.



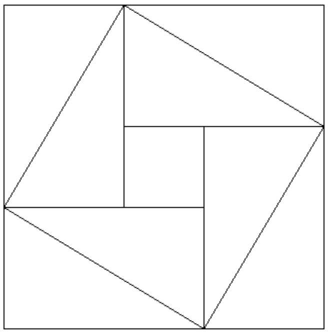
Weitere heuristische Strategie: Symmetrien ausnutzen!
Aber: Die Figur hat keine fruchtbaren Symmetrien.
Also: Die Figur „symmetrisch machen“:



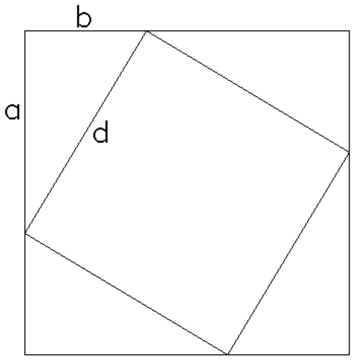
Nun ist $(2\cdot a)^2=2\cdot d^2$, also $d=a\cdot\sqrt{2}$.
Geht das auch beim Rechteck?



Hier ist die Ausgangsfigur sogar noch unsymmetrischer als beim Quadrat.
Aber: Derselbe Trick hilft trotzdem weiter:

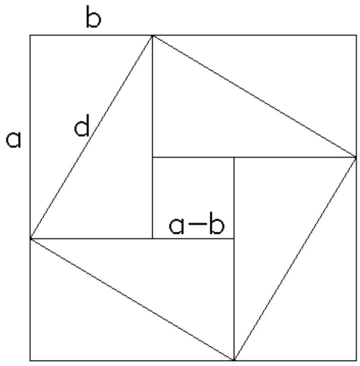


Diese Figur hat sogar <u>zweierlei</u> Struktur:



Der Flächeninhalt des großen Quadrats ist einerseits $(a+b)^2$ und andererseits $4\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot b+d^2$, woraus man d berechnen kann.

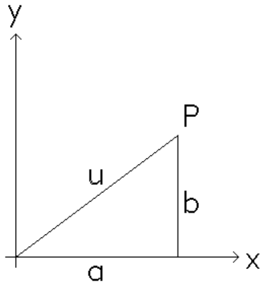
Man hätte die Figur aber auch so benutzen können:



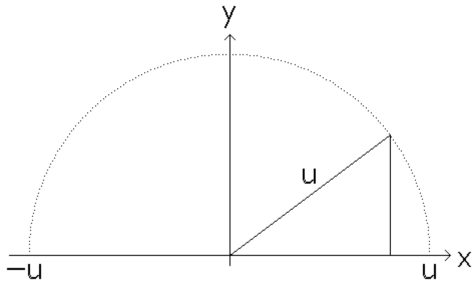
Der Flächeninhalt des mittleren schräg liegenden Quadrats ist einerseits d^2 und andererseits $4\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot b+(a-b)^2$, woraus man auch d berechnen kann.

3. Pythagoras und Thales

Hier orientiert sich der Beweis an dem Problem, den Abstand u des Punktes $P=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ zum Ursprung ermitteln zu wollen.

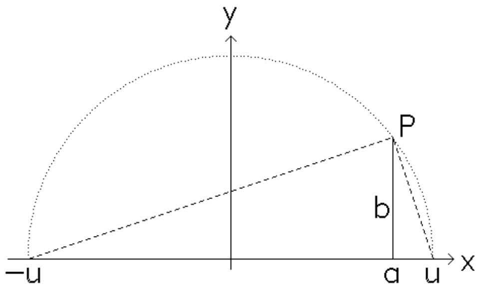


Der gesuchte Abstand u taucht an vielen Stellen auf:



Jeder Punkt P auf dem Kreis hat die beiden Eigenschaften:

- Er hat den Abstand u zum Ursprung
- Die beiden zugehörigen Schenkel sind zueinander orthogonal:



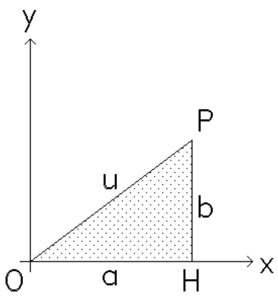
Die Schenkel haben die Steigungen $\frac{b}{a+u}$ und $\frac{b}{a-u}$;
da beide aufeinander senkrecht stehen, gilt

$$\frac{b}{a+u} \cdot \frac{b}{a-u} = -1$$

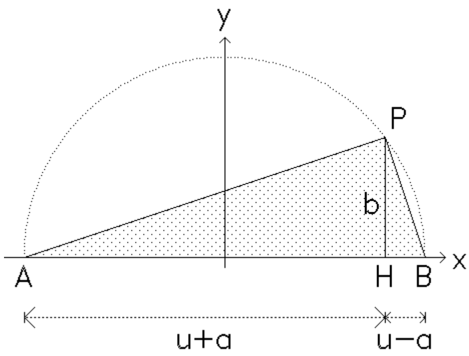
und damit

$$b^2 = u^2 - a^2 .$$

Dies ist der <u>Satz des Pythagoras</u> für das Dreieck OHP:

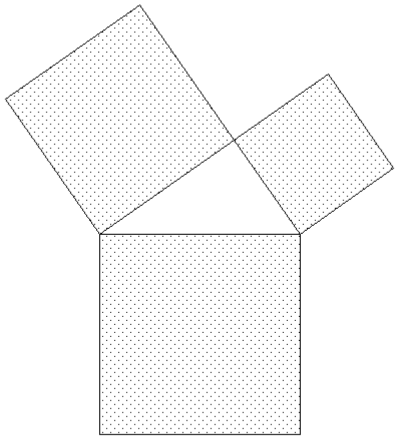


Schreibt man ihn hingegen als $b^2 = (u+a)\cdot(u-a)$, so handelt es sich um den <u>Höhensatz</u> im Dreieck ABP:



4. Schlußbemerkungen

Die bekannteste Figur zum Satz des Pythagoras



wurde bisher gar nicht erwähnt.
Sie steht aber auch nicht am Beginn der Überlegungen, sondern wird erst dann thematisiert, wenn die Schüler den Satz kennen.
Finge man mit dieser Figur an, so erschiene der Satz viel tiefer: Es wäre nicht klar, wie man auf ihn kommt, und es wäre auch nicht klar, wie man ihn beweist.