Jörg MEYER, Hameln 17. 3. 2024

Proklos konstruiert Kegelschnitte

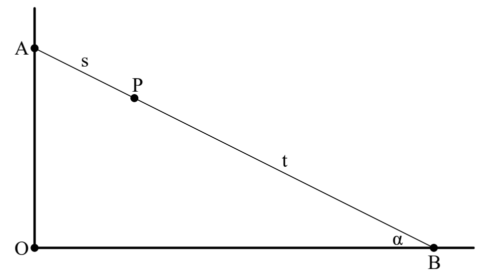
Der altgriechische Philosoph PROKLOS DIADOCHOS war nicht nur ein wesentlicher Vertreter des Neuplatonismus, sondern hat sich auch mit Mathematik beschäftigt. Ihm wird folgender Satz zugeschrieben[1]:

> Bewegen sich die Endpunkte einer *festen Strecke* auf zwei sich schneidenden Geraden, so bewegt sich jeder (innere) Punkt der Strecke auf einem Kegelschnitt.

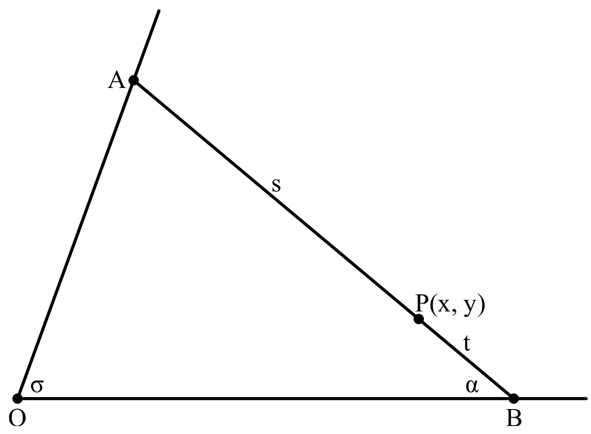
Sind die beiden Geraden zueinander orthogonal, hat man das Problem der rutschenden Leiter, das zu einer Ellipse und damit auch zum Ellipsenzirkel nach ARCHIMEDES führt:

Eine Leiter rutscht eine Hauswand hinab, und zwar so, dass das obere Leiterende stets die Wand und das untere Leiterende stets den Erdboden berührt.

Auf dem Erdboden liegen O und B, an der Wand liegen O und A. Die Leiter ist die Strecke AB. Deren Länge sei 1. O sei Ursprung des Koordinatensystems. Wegen $A=(0;\ \sin\alpha)$, $B=(\cos\alpha;\ 0)$ ist $P=t\cdot A+s\cdot B=(s\cdot\cos\alpha;\ t\cdot\sin\alpha)$ mit $s+t=1$. P beschreibt also eine Ellipse.



Was passiert, wenn die Wand einen beliebigen Winkel mit dem Erdboden bildet?



Es sei $s+t=1$ und $m=\tan\sigma$. Wegen $\sin\sigma=\frac{\sin\alpha}{OA}=\frac{\sin(\alpha+\sigma)}{OB}$ ist

$$B=\left(\frac{\sin(\alpha+\sigma)}{\sin\sigma};\ 0\right)=\left(\frac{\sin\alpha}{m}+\cos\alpha;\ 0\right) \text{ und}$$

$$A=\frac{\sin\alpha}{\sin\sigma}\cdot(\cos\sigma;\ \sin\sigma)=\left(\frac{\sin\alpha}{m},\ \sin\alpha\right), \text{ also}$$

$$P=t\cdot A+s\cdot B=\left(\frac{\sin\alpha}{m}+s\cdot\cos\alpha;\ t\cdot\sin\alpha\right)$$

$$=\left(\frac{\sin\alpha}{m};\ 0\right)+(s\cdot\cos\alpha;\ t\cdot\sin\alpha)=(x;\ y)$$

Da $\left(\frac{\sin\alpha}{m};\ 0\right)$ von α abhängt, kann man nicht einfach sagen, dass P eine Ellipse beschreibt.

Wegen $y=t\cdot\sin\alpha$ und $x=\frac{\sin\alpha}{m}+s\cdot\cos\alpha=\frac{y}{t\cdot m}+s\cdot\sqrt{1-\frac{y^2}{t^2}}$ ist

$$x-\frac{y}{t\cdot m}=s\cdot\sqrt{1-\frac{y^2}{t^2}}$$

$$x^2-\frac{2\cdot x\cdot y}{t\cdot m}+y^2\cdot\left(\frac{1}{t^2\cdot m^2}+\frac{s^2}{t^2}\right)-s^2=0$$

[1] D. Herrmann (2014): Die antike Mathematik. Springer, S. 389.

Man bekommt also eine quadratische Kurve, mithin einen Kegelschnitt.

Ist $s=0$ (also $P=A$), hat man $x^2-\frac{2\cdot x\cdot y}{m}+y^2\cdot\left(\frac{1}{m^2}\right)=\left(x-\frac{y}{m}\right)^2=0$, also die (doppelt zählende) Gerade durch O und A.

Außer für $s=0$ und $t=0$ bekommt man einen eigentlichen Kegelschnitt. Welcher Art ist dieser Kegelschnitt? Darüber gibt der Schnitt mit der Ferngeraden Auskunft.

Schreibt man $x=\frac{x}{z}$, $y=\frac{y}{z}$, beschreibt die Gleichung $z=0$ die Ferngerade. Man geht also über von den affinen Koordinaten $(x;\ y)$ zu den homogenen projektiven Koordinaten $(x:y:z)=\left(\frac{x}{z}:\frac{y}{z}:1\right)$ und erhält zunächst

$$x^2-\frac{2\cdot x\cdot y}{t\cdot m}+y^2\cdot\left(\frac{1}{t^2\cdot m^2}+\frac{s^2}{t^2}\right)-s^2\cdot z^2=0\,.$$

Der Schnitt mit der Ferngeraden liefert

$$x^2-\frac{2\cdot x\cdot y}{t\cdot m}+y^2\cdot\left(\frac{1}{t^2\cdot m^2}+\frac{s^2}{t^2}\right)=0\,.$$

Ist $y=0$, so ist auch $x=0$ und damit den unzulässigen „Punkt“ $(0:0:0)$. Für $y\neq 0$ ist

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{2}{t\cdot m}\cdot\frac{x}{y}+\left(\frac{1}{t^2\cdot m^2}+\frac{s^2}{t^2}\right)=0$$

und damit

$$\frac{x}{y}=\frac{1}{t\cdot m}\pm\sqrt{-\frac{s^2}{t^2}}\ ;$$

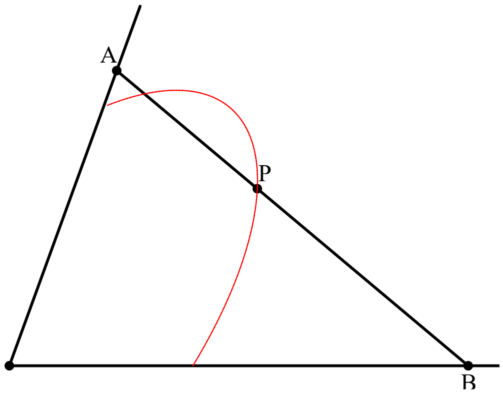
es gibt also keinen reellen Schnitt mit der Ferngeraden.

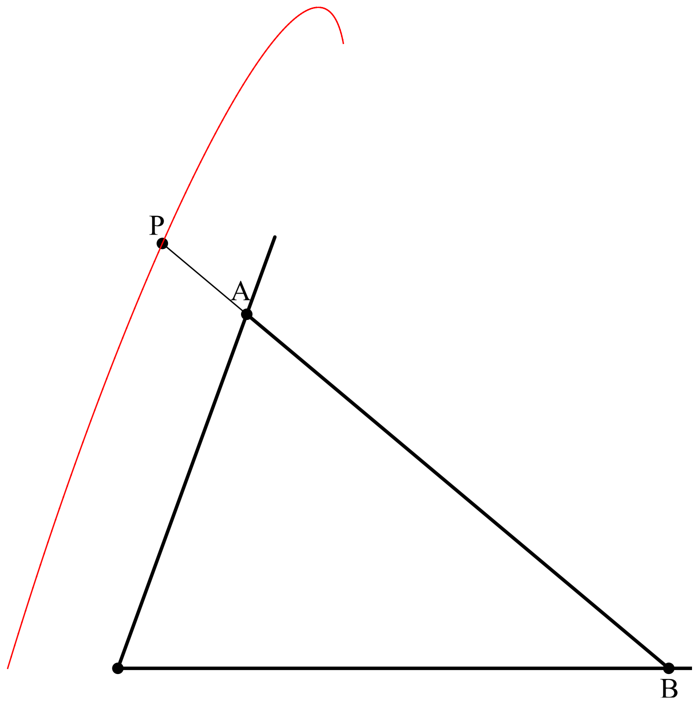
Daher muss es sich um eine Ellipse handeln (Hyperbeln haben zwei Schnittpunkte mit der Ferngeraden (Beispiel: $x\cdot y=1$ hat die Schnittpunkte $(1:0:0)$ und $(0:1:0)$), Parabeln berühren die Ferngerade (Beispiel: $y=x^2$ hat den doppelten Schnittpunkt $(0:1:0)$).

Wie man sieht, ist die Beschränkung auf innere Punkte nicht notwendig; es gilt sogar:

> Bewegen sich die Endpunkte einer *festen Strecke* auf zwei sich schneidenden Geraden, so bewegt sich jeder Punkt der Strecke (außer den Endpunkten) auf einer Ellipse.

Unten links sieht man die Kurve für einen Innenpunkt, unten rechts für einen Außenpunkt.


A
P
B


P
A
B