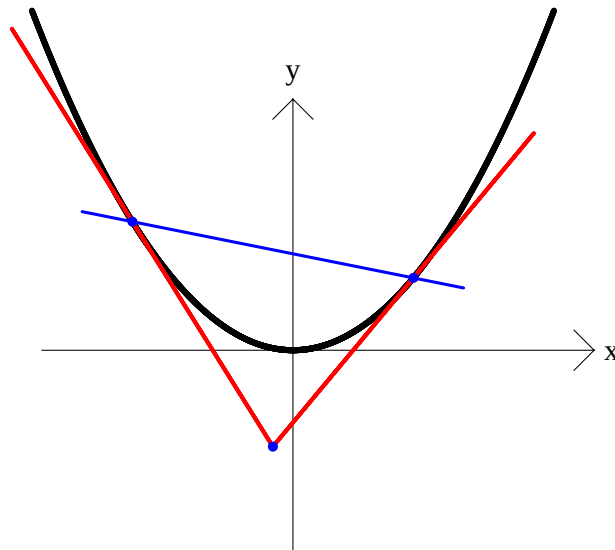


Polarenkurven und Normalenpolaren

1. Parabelpolaren

Es sei $f(x) = x^2$. Die Tangente zur Stelle a hat die Gleichung $y = 2 \cdot a \cdot (x - a) + a^2 = 2 \cdot a \cdot x - a^2$; auf ihr liege der Punkt $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, d.h. es gilt $v = 2 \cdot a \cdot u - a^2$ bzw. $a^2 = 2 \cdot a \cdot u - v$.

Der Berührungspunkt $\begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix}$ liegt also auf der Geraden mit $y = 2 \cdot u \cdot x - v$; dies ist die bekannte *Polarengerade* zu $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.



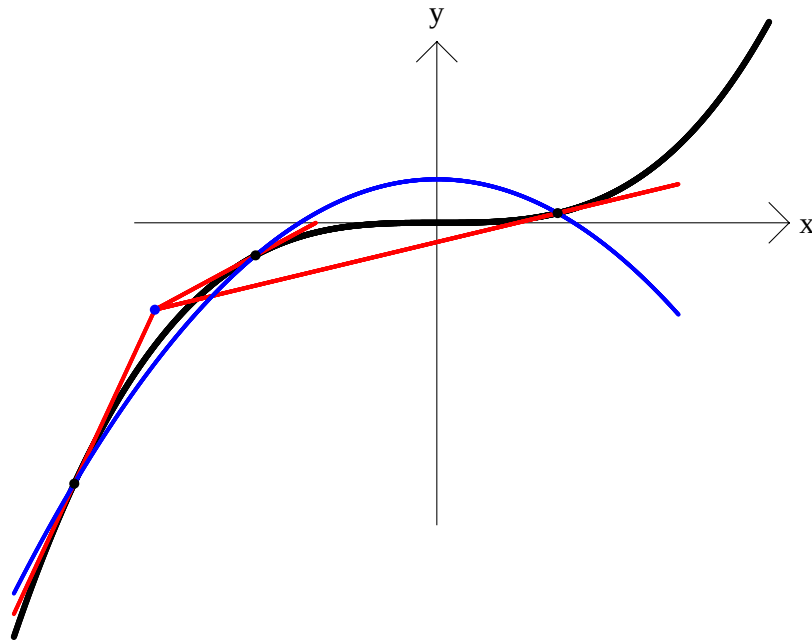
Liegt $P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$ auf der Polaren zu $Q = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}$, so liegt Q auf der Polaren zu P . Die Begründung ist

einfach: Beide Aussagen sind zu $q_x \cdot p_x = \frac{p_y + q_y}{2}$ äquivalent. Aufgrund dieser Eigenschaft kann man auch Polaren zu Punkten innerhalb der Parabel konstruieren.

2. Polarkurve zur kubischen Parabel

Es sei $f(x) = x^3$. Die Tangente zur Stelle a hat die Gleichung $y = 3 \cdot a^2 \cdot (x - a) + a^3 = 3 \cdot a^2 \cdot x - 2 \cdot a^3$; auf ihr liege der Punkt $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, d.h. es gilt $v = 3 \cdot a^2 \cdot u - 2 \cdot a^3$ bzw. $a^3 = \frac{3 \cdot a^2 \cdot u - v}{2}$.

Der Berührungspunkt $\begin{pmatrix} a \\ a^3 \end{pmatrix}$ liegt also auf der Kurve mit $y = \frac{3 \cdot u \cdot x^2 - v}{2}$; dies ist die *Polarenkurve* zu $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

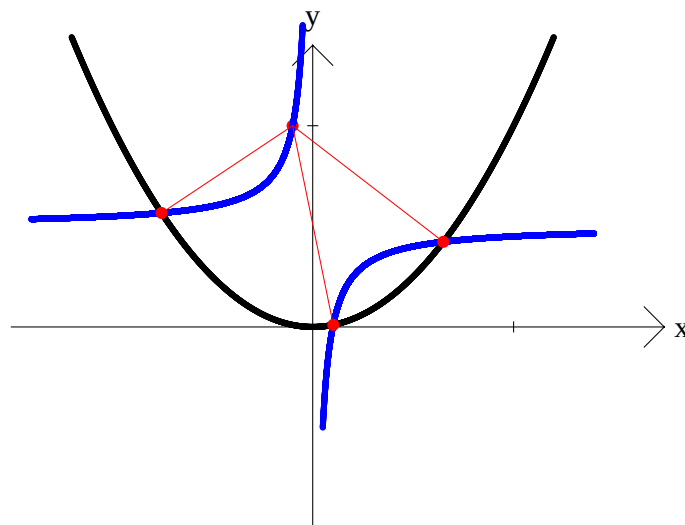


Liegt $P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$ auf der Polarenkurve zu $Q = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}$, so gilt $2 \cdot p_y + q_y = 3 \cdot q_x \cdot p_x^2$. Hieraus folgt *nicht*, dass Q auf der Polarenkurve zu P liegt.

3. Parabelnormalen

Es sei $f(x) = x^2$. Die Normale zur Stelle a hat die Gleichung $y = \frac{-1}{2 \cdot a} \cdot (x - a) + a^2 = \frac{-1}{2 \cdot a} \cdot x + \frac{1}{2} + a^2$; auf ihr liege der Punkt $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, d.h. es gilt $v = \frac{-1}{2 \cdot a} \cdot u + \frac{1}{2} + a^2$.

Der Ausgangspunkt $\begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix}$ liegt daher auf der Kurve mit $y = \frac{u}{2} \cdot \frac{1}{x} + v - \frac{1}{2}$. Dies ist die *Normalenpolare* zu $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.



Liegt $P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$ auf der Normalenpolare zu $Q = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}$, so gilt $2 \cdot p_x = \frac{q_x - p_x}{p_y - q_y}$. Hieraus folgt *nicht*, dass Q auf der Normalenpolaren zu P liegt.