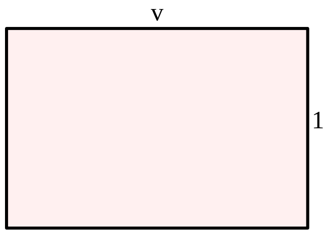
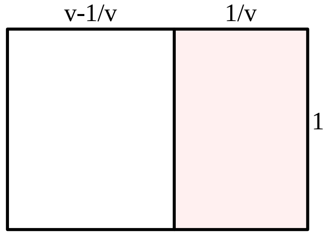
Dr. Jörg Meyer
4. 5. 2020

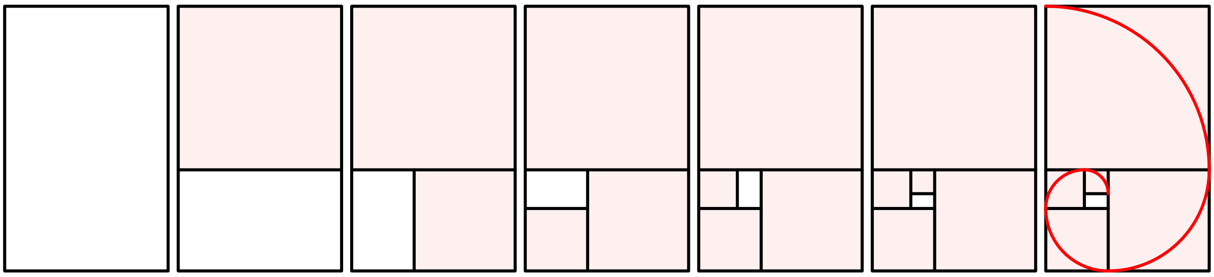
Die Plastikzahl und ihr Umfeld

Teilt man ein Rechteck auf in ein dazu ähnliches Rechteck und in ein Rest-Rechteck, so gibt es mehrere Fälle:
Sind die beiden Teilrechtecke gleich groß, so ist $v=\sqrt{2}$, und man ist beim *DIN-A-4-Format*.





Soll das Rest-Rechteck ein Quadrat sein, so ist $v^2=v+1$ und daher $v=\boxed{\frac{1+\sqrt{5}}{2}=:a}$, und man ist beim *Goldenen Schnitt*; in diesem Fall kann man das Rechteck im Limes mit nicht zueiander kongruenten Quadraten pflastern:

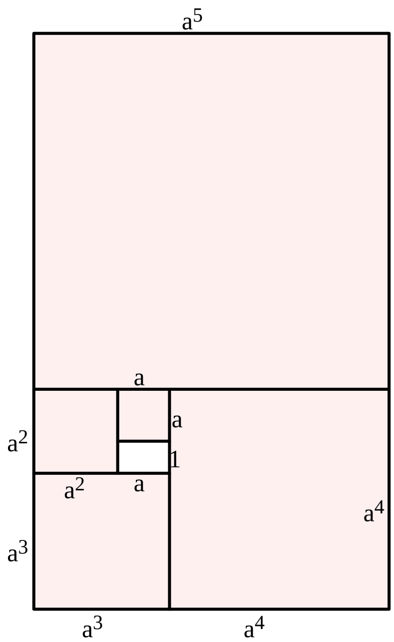


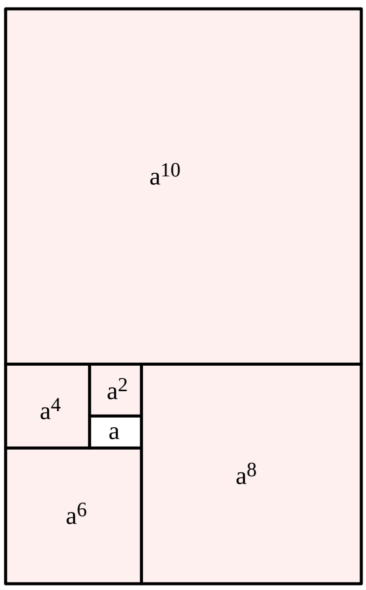
Oben rechts sieht man eine sich anbietende Viertelkreis-Spirale, die viele Krümmungssprünge aufweist.

Die Figur oben rechts hat die nebenstehenden Streckenlängen und Flächeninhalte.
Zur Berechnung links werden die Beziehungen

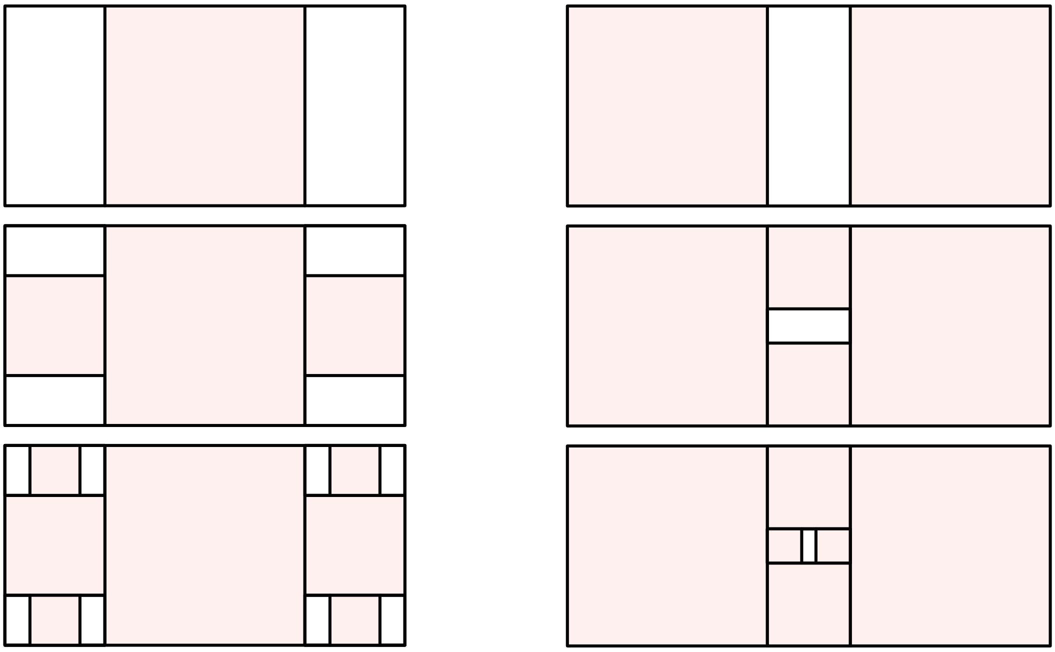
$$a^n+a^{n+1}=a^{n+2}$$

für $n\geq 0$ verwendet.



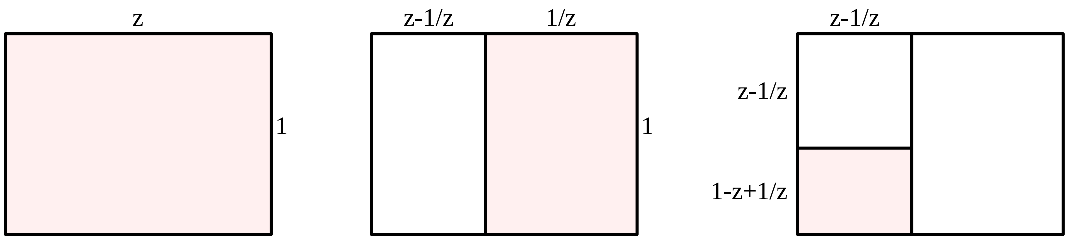


Für $v=2$ lässt sich das Rechteck in zwei dazu ähnliche und in ein Quadrat zerlegen (unten links), und für $v=1+\sqrt{2}$ lässt sich das Ausgangsrechteck in ein dazu ähnliches und in zwei Quadrate zerlegen (unten rechts):



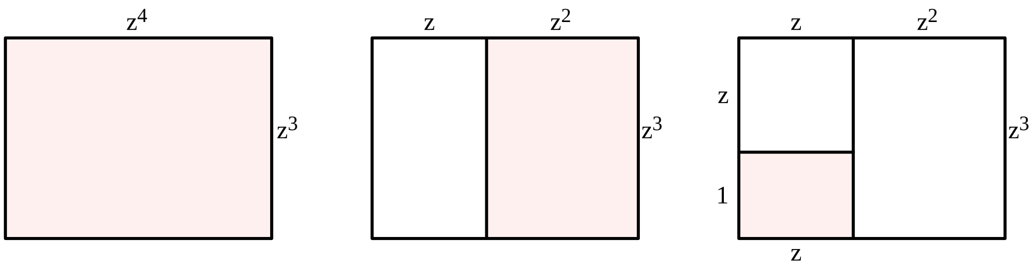
In beiden Fällen ist eine Iteration möglich und damit im Limes eine Pflasterung des Rechtecks mit (allerdings zum Teil zueinander kongruenten) Quadraten.

Soll das Rest-Rechteck in *zwei* dazu ähnliche und in *ein* Quadrat zerlegt werden, so sei $\boxed{v =: z}$, und es muss $z - \frac{1}{z} = z \cdot \left(1 - z + \frac{1}{z}\right)$ bzw. $\boxed{z^3 = z + 1}$ sein:

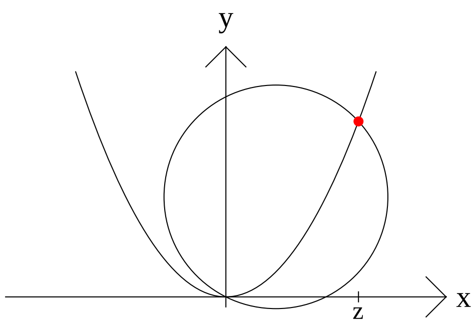


Die reelle Lösung $z \approx 1{,}3247$ heißt *Plastikzahl*, wobei nicht das Material, sondern die räumliche Verwendung (in der Architektur) bestimmend für die Namensgebung war. Die Zahl wurde durch den niederländischen Architekten Hans VAN DER LAAN populär gemacht.

Multipliziert man im Bild oben rechts alle Seitenlängen mit z^3, so findet man im Bild rechts alle z-Potenzen, und die Gleichung $z^3 = z + 1$ wird „sichtbar“.



Die Plastikzahl z lässt sich zwar nicht mit Zirkel und Lineal, wohl aber als Schnittstelle *konstruieren*, indem man den Kreis mit $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}$ mit der Normalparabel ($y=x^2$) schneidet.

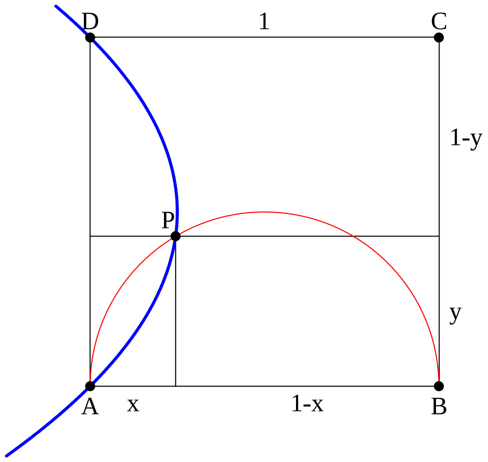


Man bekommt die Plastikzahl auch bei der Aufgabe, ein Quadrat in *drei* nichtkongruente und zueinander ähnliche Rechtecke aufzuteilen; dies liefert auch eine weitere Möglichkeit, die Plastikzahl zu konstruieren:

Koordinatisiert man mit $A=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, so ist

$\frac{1-x}{y}=\frac{y}{x}$ und damit $\boxed{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}}$; P liegt also auf dem Thaleskreis über AB, so dass AP auf PB senkrecht steht.

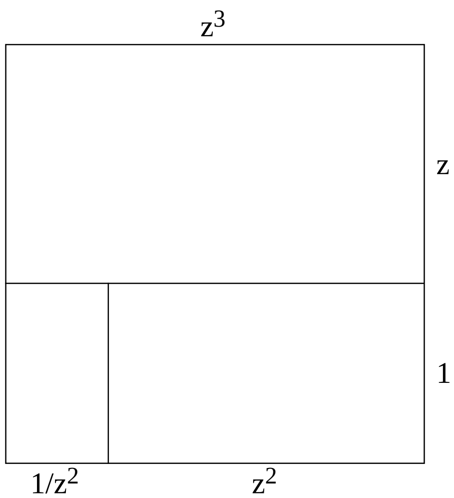
Es ist auch $\frac{1}{1-y}=\frac{y}{x}$ bzw. $\boxed{x=-y^2+y}$;



P liegt also auch auf der Parabel (durch A und D) mit dem Brennpunkt $\begin{pmatrix}0\\1/2\end{pmatrix}$ und der Leitlinie mit der Gleichung $x=\frac{1}{2}$. Damit kann man P *konstruieren*. Aus den beiden eingekastelten Gleichungen erhält man $y^3-2\cdot y^2+3\cdot y-1=0$. Diese Gleichung wird schöner, wenn man die Variable $z=\frac{1-y}{y}$ verwendet, also $y=\frac{1}{z+1}$ setzt; man bekommt $\boxed{z^3=z+1}$.

Etwas weiter unten wird die Beziehung $z^5=z^4+1$ benötigt, die man leicht aus $z^3=z+1$ gewinnt.

Teilt man in der obigen Skizze alle Seitenlängen durch y, bekommt man als vertikale Seitenabschnitte z und 1. Die Breite des Quadrats ist dann $\frac{1}{y}=z+1=z^3$. Der untere linksseitige horizontale Seitenabschnitt wird $\frac{x}{y}=1-y=1-\frac{1}{z+1}=\frac{z}{z^3}=\frac{1}{z^2}$, und der rechtsseitige bekommt die Länge $z^3-\frac{1}{z^2}=\frac{z^5-1}{z^2}=\frac{z^4}{z^2}=z^2$.



Damit sind alle Seitenlängen als z-Potenzen dargestellt. Man „sieht“ auch, dass $z^3=z+1$ ist.

Man beachte aber, dass hier das Seitenverhältnis nicht mehr z, sondern z^2 ist.

Die Plastikzahl ist wie auch die Zahl des Goldenen Schnittes eine PISOT-VIJAYARAGHAVAN-Zahl; mit solchen Zahlen habe ich mich zuletzt in meiner Diplomarbeit beschäftigt. Für die Plastikzahl z gilt

$$1=0\cdot z^2+0\cdot z+1;\;\; z=0\cdot z^2+1\cdot z+0;\;\; z^2=1\cdot z^2+0\cdot z+0$$
$$z^3=0\cdot z^2+1\cdot z+1;\;\; z^4=1\cdot z^2+1\cdot z+0;\;\; z^5=1\cdot z^2+1\cdot z+1$$
$$z^6=1\cdot z^2+2\cdot z+1;\;\; z^7=2\cdot z^2+2\cdot z+1;\;\; z^8=2\cdot z^2+3\cdot z+2$$
$$z^9=3\cdot z^2+4\cdot z+2;\;\; z^{10}=4\cdot z^2+5\cdot z+3$$

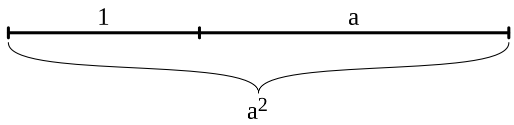
Allgemein ist $\boxed{z^n=p_n\cdot z^2+p_{n+1}\cdot z+p_{n-1}\cdot 1}$ mit $p_0=p_1=0;\, p_2=1;$ $\boxed{p_{n+3}=p_{n+1}+p_n}$, also

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p_n	0	0	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	27	37	48	64

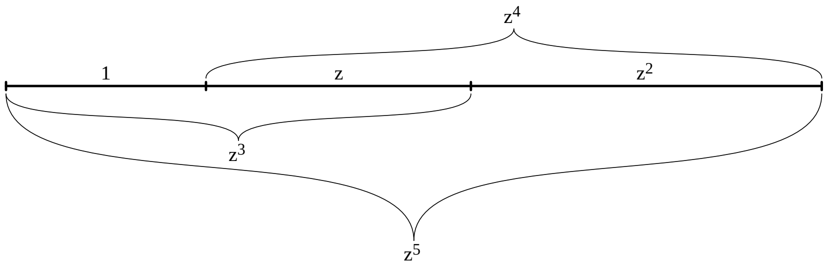
.

Diese Folge wird nach dem britischen Architekten Richard PADOVAN benannt. Die Quotienten aufeinander folgender Glieder konvergieren gegen die Plastikzahl.

Die Zahl $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ des Goldenen Schnitts hat auch mit Streckenteilung zu tun.

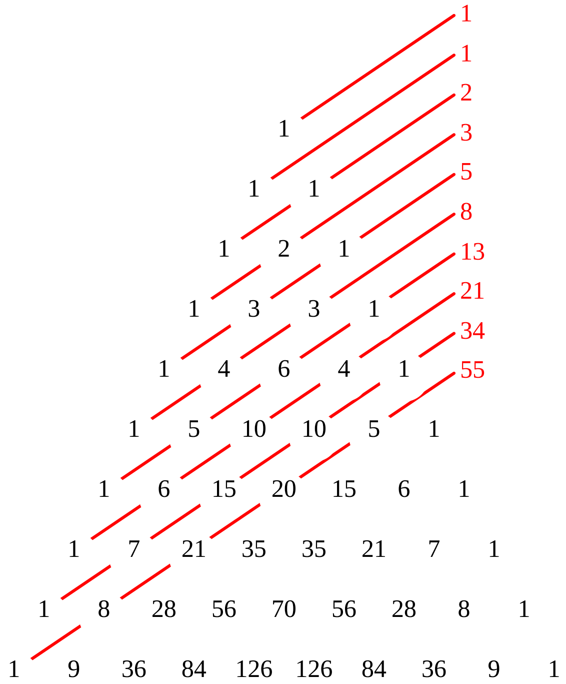


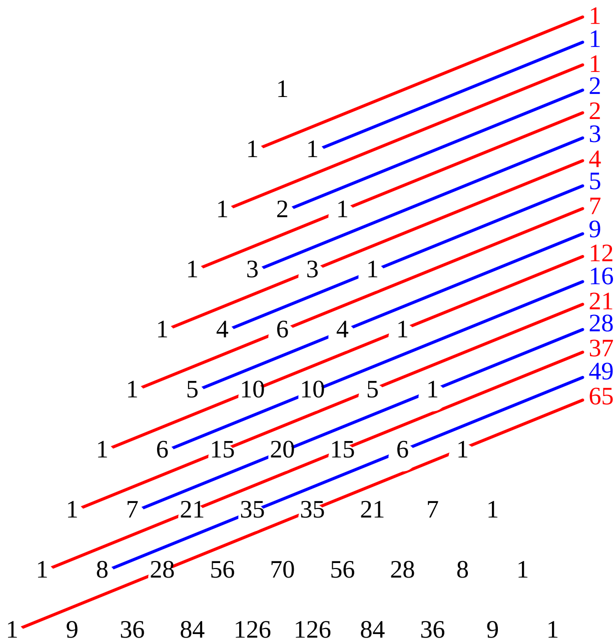
Mit der Plastikzahl z ist eine Teilung in drei Teile verbunden:



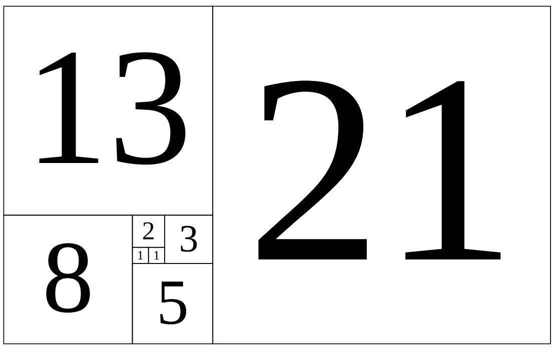
Die Zahl des Goldenen Schnitts ist bekanntlich eng mit der FIBONACCI-Folge verbunden; diese ist definiert durch $f_0=f_1=1;\; f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ und hat als erste Glieder 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ….
Diese Folge tritt auch als Diagonalensumme im PASCAL-Dreieck auf (s.u., links).

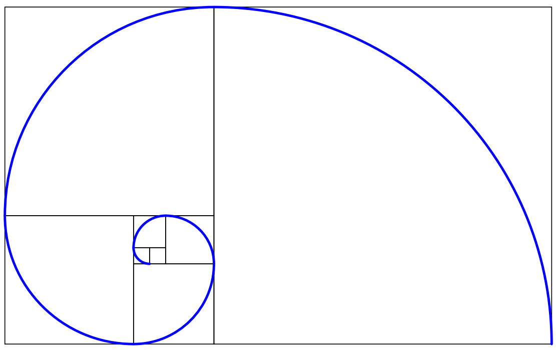
Die Plastikzahl ist mit der PADOVAN-Folge 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, …verbunden (s.o.); auch diese tritt im PASCAL-Dreieck auf (s.u., rechts).



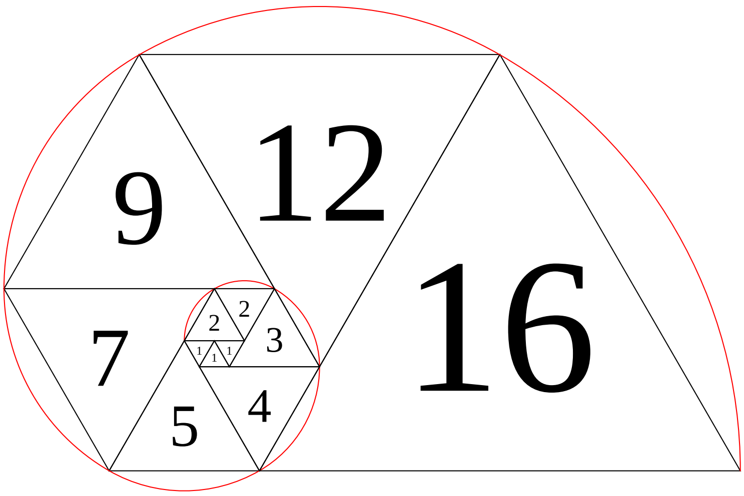


Die zum Goldenen Schnitt gehörige FIBONACCI-Folge lässt sich durch Quadrate schön visualisieren (die Zahlen geben die Seitenlängen an) und liefert damit die bekannte Viertelkreis-Spirale, die die gleiche Gestalt hat wie die rote Viertelkreis-Spirale von Seite 1:





Die Visualisierung der PADOVAN-Folge scheint nicht so einfach zu gelingen. Man hat mehr Erfolg, wenn man erstens keine Quadrate, sondern gleichseitige Dreiecke nimmt und wenn man zweitens nicht die Rekursion $p_{n+3} = p_{n+1} + p_n$ verwendet, sondern die wegen $p_{n+3} + p_{n+2} = p_{n+2} + p_{n+1} + p_n$ daraus folgende Rekursion $p_{n+5} = p_{n+4} + p_n$ verwendet und die ersten 5 Anfangswerte (1, 1, 1, 2, 2) vorgibt.



Zusammenfassung der Zerlegungen

Bei den folgenden Rechtecken gebe der Index stets die Länge kleineren Seite an.

Es sei Q_s ein Quadrat

D_s ein („DIN-A“-) Rechteck mit dem Seitenverhältnis $\sqrt{2}$

G_s ein („goldenes“) Rechteck mit dem Seitenverhältnis $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

P_s ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis z (Plastikzahl)

Pl_s ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis z^2 (Quadrat der Plastikzahl)

Dann wurden u.a. die folgenden *Zerlegungen* betrachtet; dabei steht „+“ für die disjunkte Vereinigung:

$$\begin{aligned} D_2 &= D_1 + D_1 \\ G_a &= G_1 + Q_a \\ P_{z^4} &= P_{z^2} + P_1 + Q_z \\ Q_{z^5} &= Pl_1 + Pl_{z^2} + Pl_{z^3} \end{aligned}$$