Dr. Jörg Meyer, Hameln

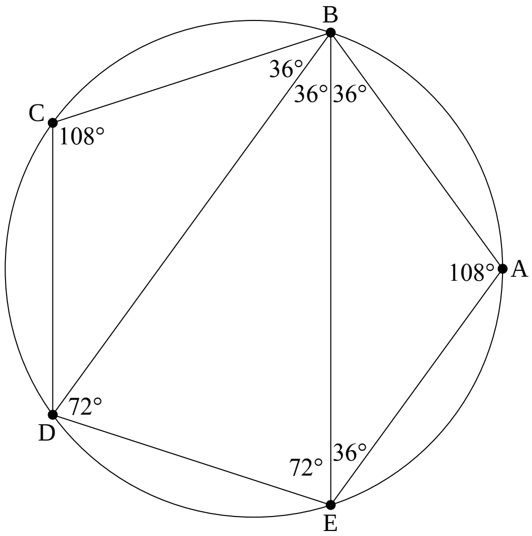
4. 5. 2020

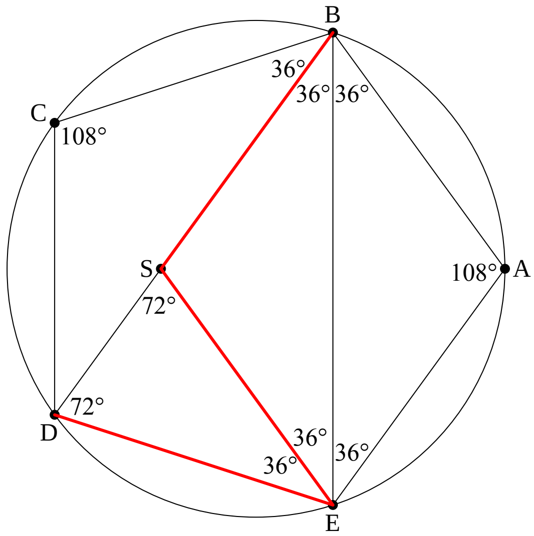
Das regelmäßige Fünfeck

Für Kenner des regelmäßigen Fünfecks bietet diese Datei nichts Neues; sie dient nur zur Referenz.

Viele Bilder sind skalierbar, aber nicht alle, da beim Übergang von svg zu Windows-Metafont manche Zeichen nicht oder falsch erkannt werden.

Ein regelmäßiges Fünfeck hat 108° als Innenwinkel.





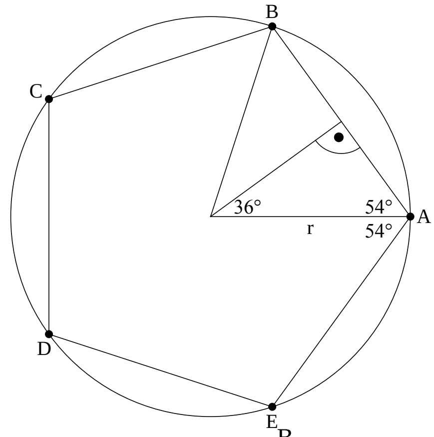
In der rechtsstehenden Skizze sind alle roten Strecken gleich lang. Es ist $\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{DB}} = \frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{DE}} = \frac{\mathrm{DB}-\mathrm{DE}}{\mathrm{DE}}$, also $\mathrm{DB}^2 - \mathrm{DE}\cdot\mathrm{DB} - \mathrm{DE}^2 = 0$ mit der positiven Lösung $\boxed{\mathrm{DB} = \mathrm{DE}\cdot\varphi}$ mit der Zahl des GOLDENEN SCHNITTES $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; dies ist die positive Lösung von $\varphi^2 = \varphi + 1$ mit den Rechenregeln $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$; $\frac{1}{\varphi^2} = 2 - \varphi$ und $\varphi^3 = 1 + 2\cdot\varphi$.

Man erkennt an der Skizze oben rechts, dass $\cos 36° = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{AB}} = \boxed{\frac{\varphi}{2} = \cos 36°}$ ist. Damit ist

$$\sin 36° = \sqrt{1-\frac{\varphi^2}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{3-\varphi}}{2} = \sin 36°}.$$

Wegen $\sin 36° = \frac{AB}{2 \cdot r}$ gilt für den Umkreisradius r die Beziehung

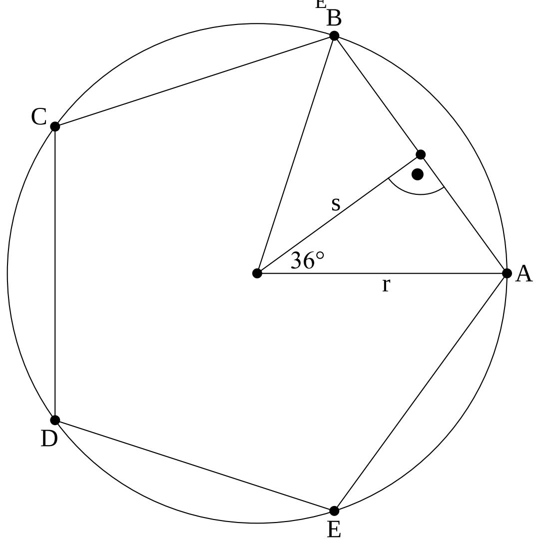
$$\boxed{r = \frac{AB}{\sqrt{3-\varphi}}}.$$



Für den Inkreisradius s hat man

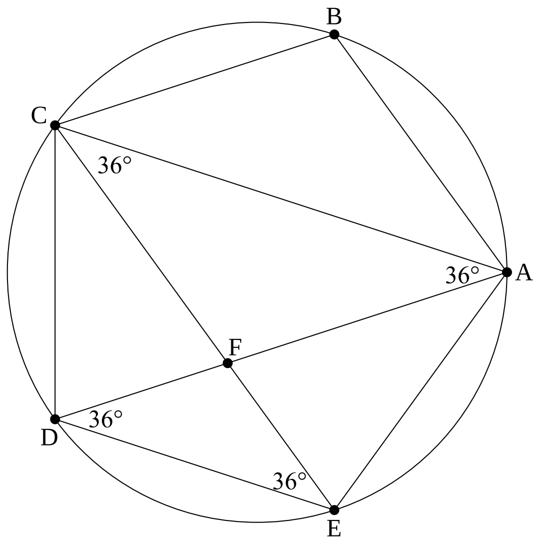
$$s = r \cdot \cos 36° = \boxed{r \cdot \frac{\varphi}{2} = s},$$

also ist das Verhältnis von Inkreisdurchmesser $2 \cdot s$ zum Umkreisradius wieder der Goldene Schnitt.



Auch die Diagonalen teilen einander im Goldenen Schnitt, denn die Dreiecke DEF und FAC sind zueinander ähnlich; daher ist

$$\boxed{\frac{FA}{FD} = \frac{AC}{DE} = \varphi}.$$



Analog ist $\dfrac{GD}{GA} = \varphi$.

Ist $DF = 1$, so ist $FA = \varphi$ und (aus Symmetriegründen) $GA = 1$, also $FG = \varphi - 1$, so dass man das Streckenverhältnis

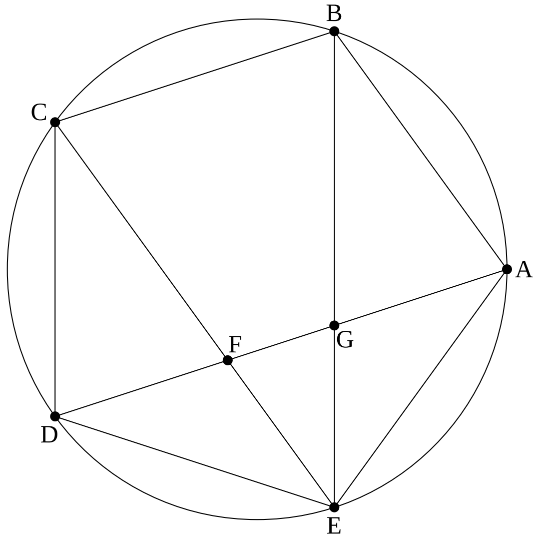
$$\boxed{DF : FG : GA = 1 : \varphi - 1 : 1 = \varphi : 1 : \varphi}$$

hat.

Insbesondere ist auch $\boxed{\dfrac{DF}{FG} = \varphi}$.

Ferner ist

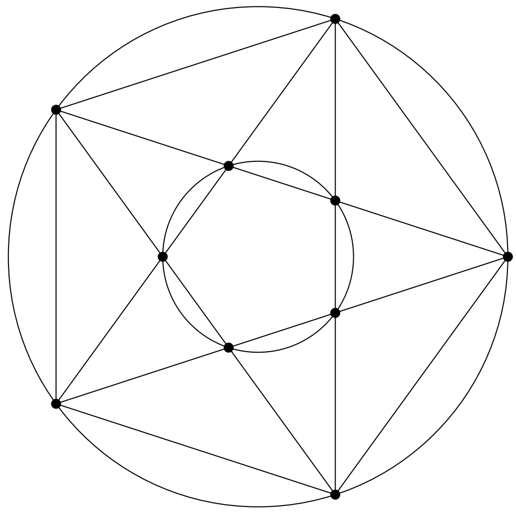
$$FG = \frac{1}{1 + 2 \cdot \varphi} \cdot AD = \frac{AD}{\varphi^3} = \boxed{\frac{AB}{\varphi^2} = FG}.$$



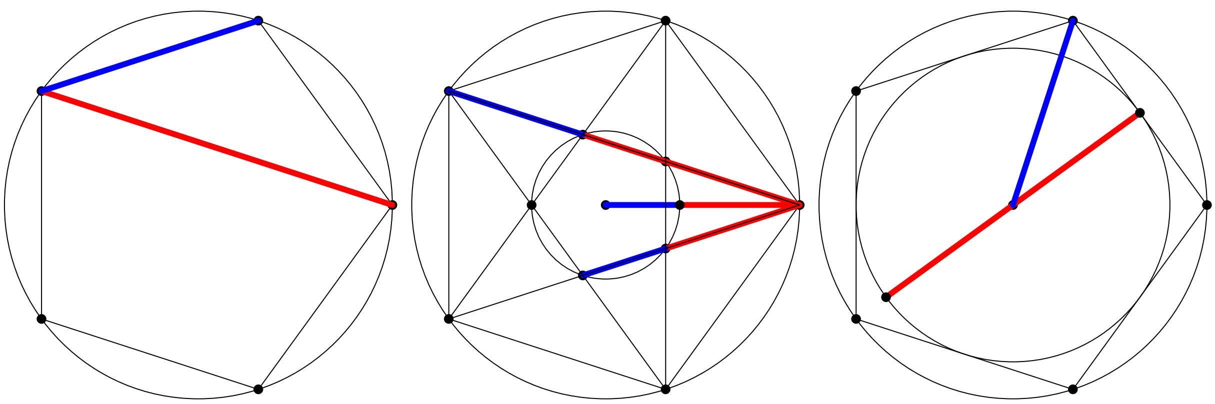
Der Abstand ρ von F oder G zum Mittelpunkt des Umkreises beträgt dann

$\boxed{\rho = \dfrac{r}{\varphi^2}}$ als Radius des Umkreises der Diagonalenschnittpunkte.

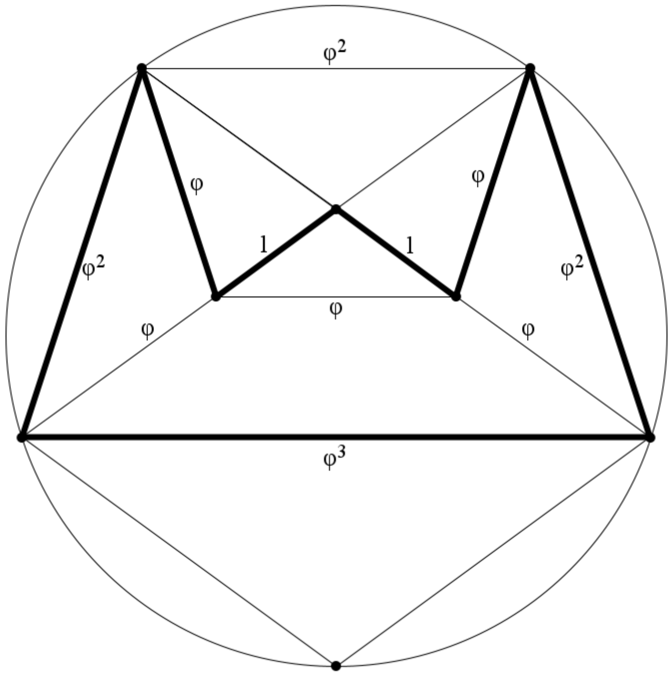
Wegen $\rho = \dfrac{r}{\varphi + 1}$ ist $\boxed{\varphi = \dfrac{r - \rho}{\rho}}$; auch hier hat man somit den Goldenen Schnitt.



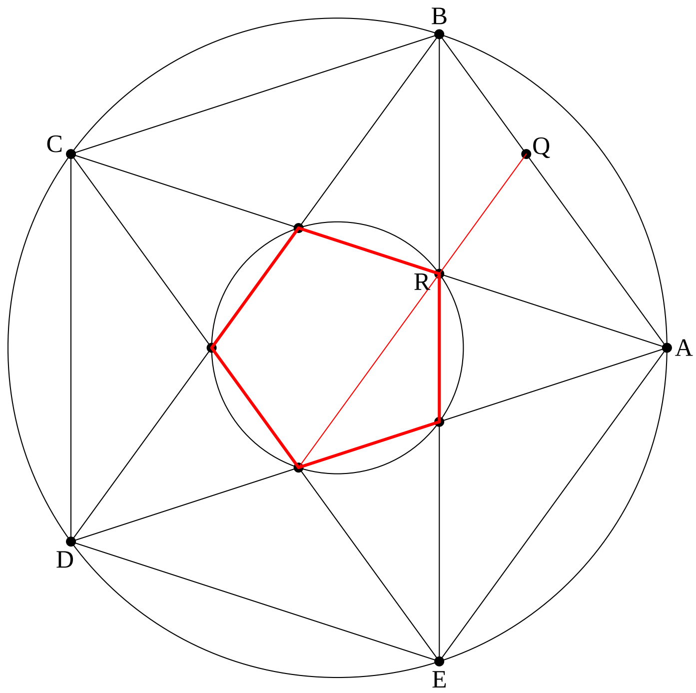
Zusammenfassung: Beim regelmäßigen Fünfeck tritt der Goldene Schnitt (rot zu blau) mehrfach auf:



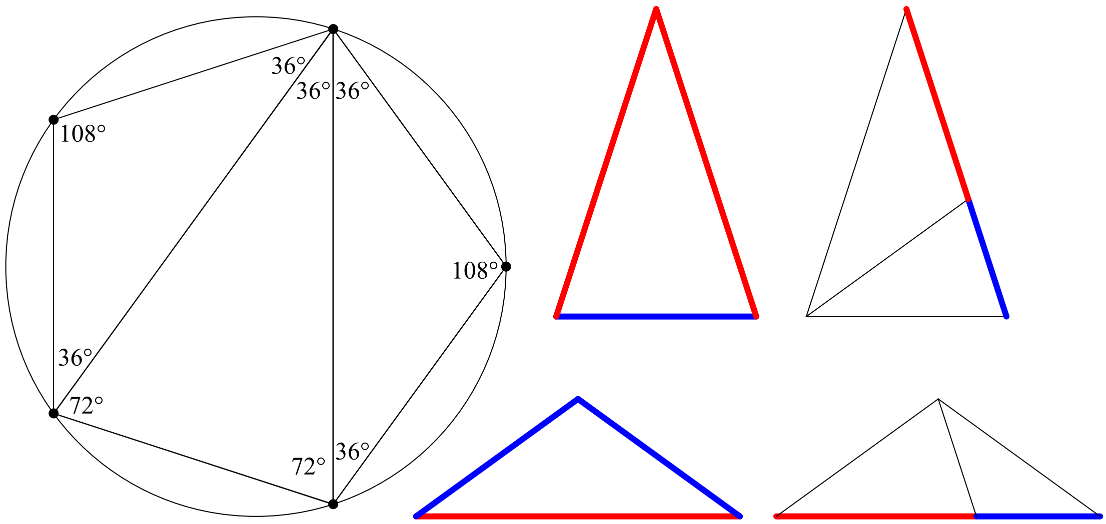
Rechts sieht man gut die Folge $1; \varphi; \varphi^2; \varphi^3$ und erkennt auch „optisch“, dass die Gleichung $\varphi^2 = \varphi + 1$ gilt.

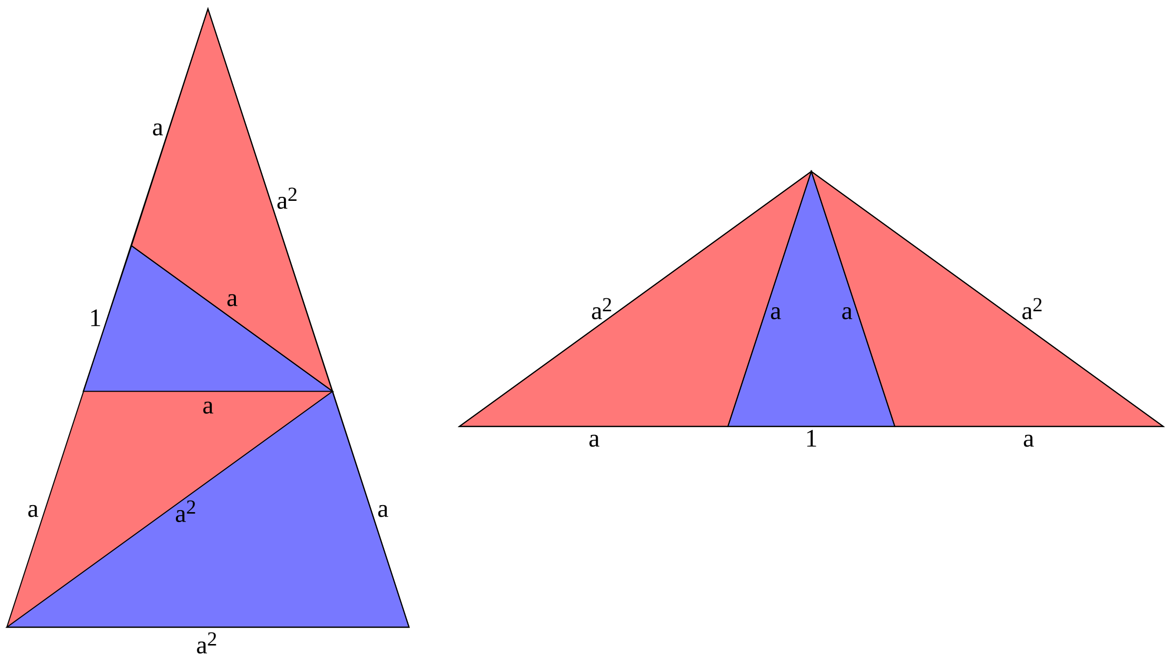


Aber damit ist man noch lange nicht am Ende:
Eine Diagonale des inneren Fünfecks schneidet die Seite AB des äußeren Fünfecks in Q und teilt sie im Goldenen Schnitt, da die Dreiecke BRA und RQB zueinander ähnlich sind.

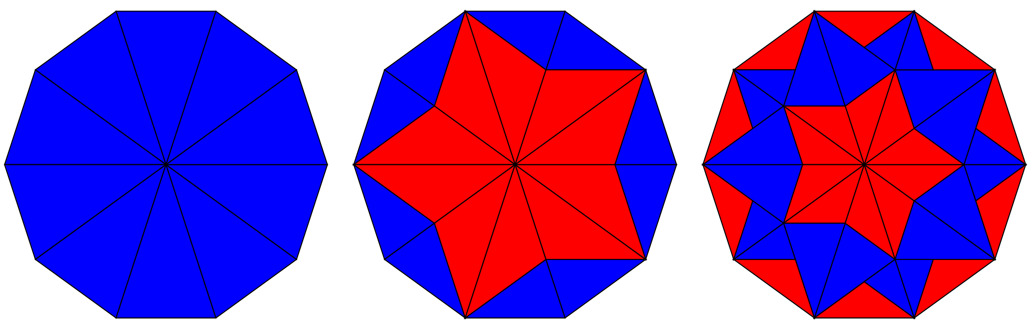


Daraus kann man etwas machen: Das regelmäßige Fünfeck enthält zwei nicht zueinander ähnliche Dreiecke, die sich beide weiter unterteilen lassen (man beachte, dass auch bei der weiteren Aufteilung der Dreiecke der Goldene Schnitt (rote zu blauen Seitenlängen) auftritt):





Ersetzt man nun in einer zentralsymmetrischen Figur die schmalen (blauen) Dreiecke durch die Aufteilungen in kleinere schmale (blaue) und dicke (rote) und iteriert man diesen Prozess, bekommt man die folgenden Figuren (mit dem Schönheitsfehler, dass rechts die blauen Dreiecke nicht alle dieselbe Größe haben):



Dies ließe sich fortsetzen.

Mit dem regelmäßigen Fünfeck lässt sich die Ebene nicht pflastern.

Ein alternatives Vorgehen führt zu der nichtperiodischen PENROSE-Parkettierung, über die man sich im Internet umfassend informieren kann.