Jörg MEYER, Hameln 11. 9. 2024

Der Satz von PASCAL über ein einem Kegelschnitt einbeschriebenes Sechseck

Inhalt

Es geht um einen Blaise PASCAL (1623 - 1662) (schon in jugendlichem Alter von 16 Jahren!) entdeckten Satz. Dieser wird zunächst formuliert, dann angewendet und zum Schluss bewiesen.

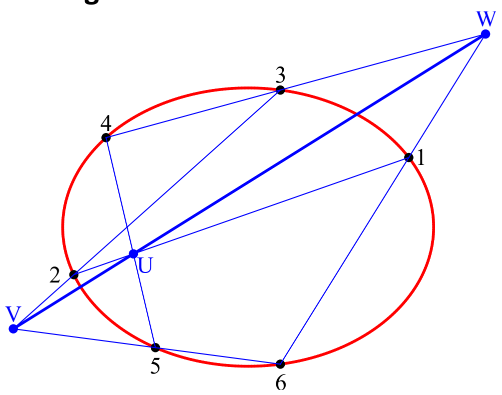
Formulierung des Satzes von PASCAL und dessen Umkehrung

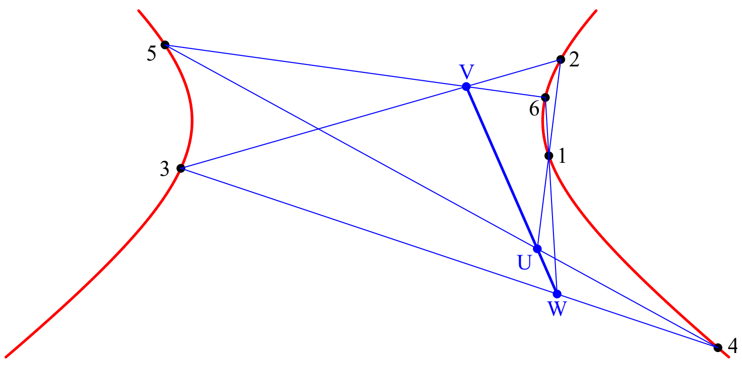
Die Punkte 1, 2, ..., 6 liegen beliebig auf einer Ellipse (oder einer Hyperbel oder einer Parabel), und es sei

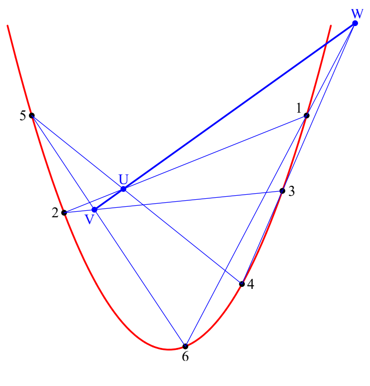
$$12 \cap 45 = U$$
$$23 \cap 56 = V$$
$$34 \cap 61 = W$$

Dann sind U, V, W kollinear.

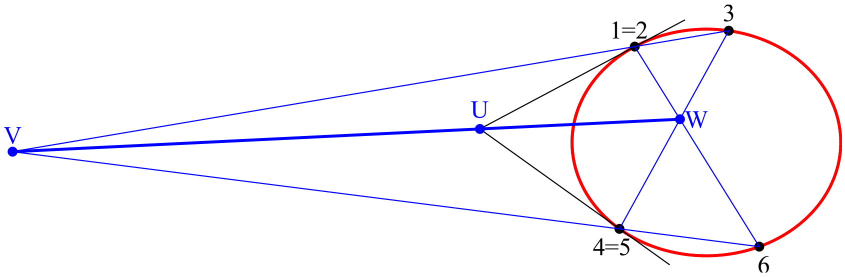
Sind umgekehrt U, V, W kollinear, so liegen die 6 Punkte auf einem Kegelschnitt (Satz von William BRAIKENRIDGE und Colin MACLAURIN).







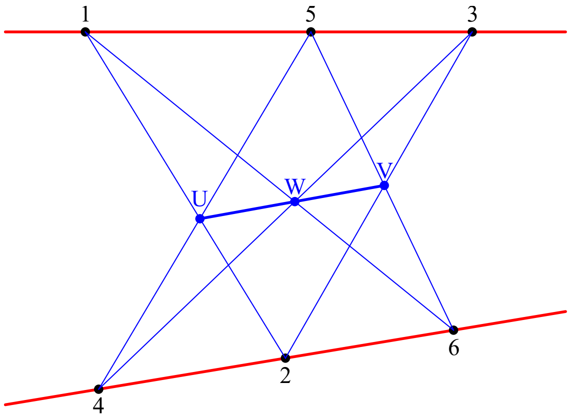
Es dürfen auch Punkte auf dem Kegelschnitt zusammenfallen.
Rechts ist 14 die Polare zu U.



Der Satz von PASCAL ist insofern bemerkenswert, als er die Inzidenz eines Punktes auf einem Kegelschnitt in Beziehung setzt zu einer Inzidenz eines Punktes auf einer Geraden.

Der Satz des PAPPOS

Entartet der Kegelschnitt zu zwei sich schneidenden Geraden, bekommt man den Satz des spätantiken griechischen Mathematikers PAPPOS, bei dem die Punkte abwechselnd auf zwei Geraden liegen.

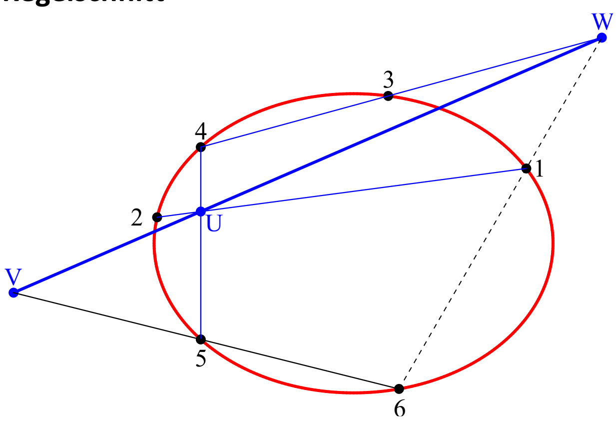


Anwendungen des Satzes von PASCAL

Die weiteren Überlegungen werden an einer Ellipse illustriert; die Übertragung auf Parabeln oder Hyperbeln ist unproblematisch.

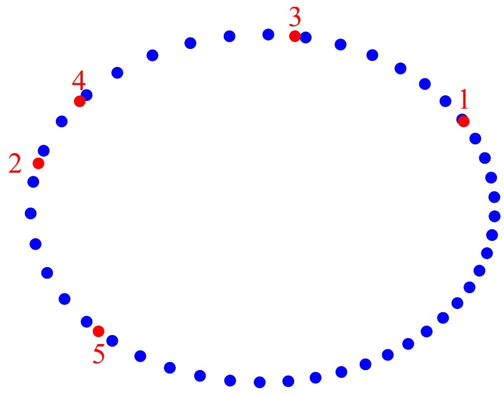
Erste Anwendung: Weitere Punkte auf dem Kegelschnitt

Mit Hilfe dies Satzes von PASCAL und seiner Umkehrung kann man zu fünf gegebenen Kurvenpunkten einen sechsten konstruieren, der etwa zu Punkt 1 eine vorgegebene Steigung hat (so dass man zueinander parallele Sehnen bekommen kann):
Es ist $U = 12 \cap 45$. Man beginnt mit einer (gestrichelten) Geraden durch 1 mit vorgegebener Steigung m, dann ist W der Schnittpunkt dieser gestrichelten Geraden mit 34 und $V = 23 \cap UW$ und schließlich $6 = 5V \cap 1W$. Damit hat 16 die vorgegebene Steigung.



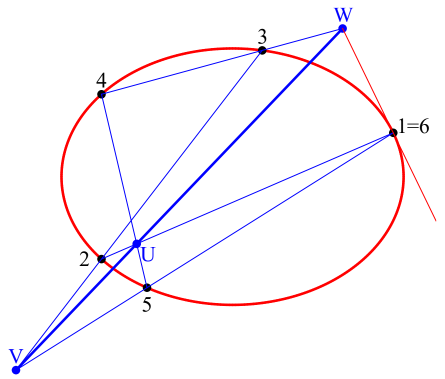
Nun kann man eine Prozedur schreiben, die zu 1, 2, ..., 5 und einer Steigung den 6. Ellipsenpunkt liefert.

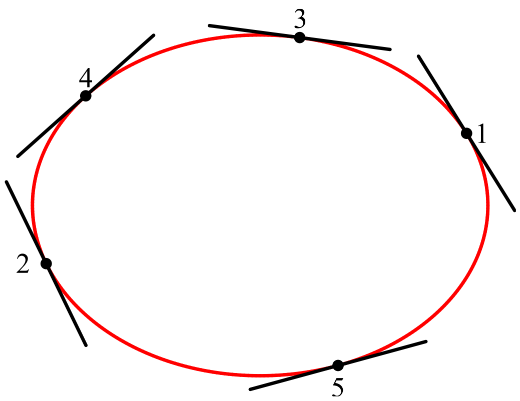
Variiert man die Steigung, lässt sich mit Hilfe dieser Prozedur die Ellipse punktweise erzeugen.
Hieraus ist klar, dass eine Ellipse durch 5 Punkte bestimmt ist.



Zweite Anwendung: Konstruktion von Tangenten

Der Satz von Pascal liefert nicht nur weitere Kurvenpunkte, sondern auch die Tangenten in den vorgegebenen (und damit in allen) Punkten:
Will man die Tangente etwa in Punkt 1 haben, identifiziere man Punkt 1 mit Punkt 6. Mit $U = 12 \cap 45$ und
$V = 23 \cap 56 = 23 \cap 51$ ist dann nicht nur
$W = 34 \cap 61 = 34 \cap 11$, sondern (wie immer) auch
$W = 34 \cap UV$, und daher ist WK die Tangente im Punkt 1.





Auch hier lässt sich eine Prozedur schreiben, die in einem Punkt die Tangente konstruiert.

Der Satz des Menelaos

Um die Kollinearität bei den Sätzen von Poppos und Pascal zu zeigen, liegt die Verwendung des Satzes von Menelaos[1] und dessen Umkehrung nahe.

[1] Das ist nicht der Bruder von Agamememnon, sondern ein antiker griechischer Mathematiker.

Die auf den Seiten des Dreiecks ABC gelegenen Punkte A‘, B‘, C‘ sind genau dann kollinear, wenn

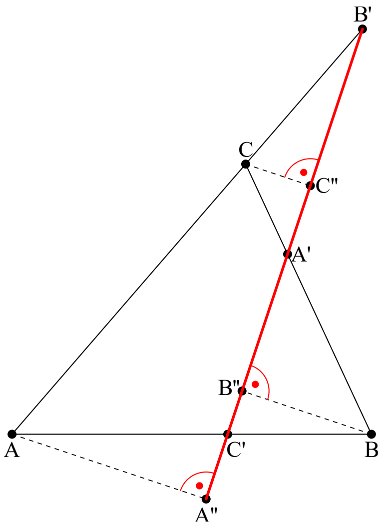
$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1$$

gilt. Dabei werden die Strecken als ungerichtet verstanden, so dass $UV=VU$ gilt.
Beweis der Notwendigkeit: Man fälle die Lote A‘‘, B‘‘, C‘‘ von A, B, C auf die Gerade durch A‘, B‘, C‘.
Dann ist (zueinander ähnliche Dreiecke!)

$$\frac{AC'}{C'B}=\frac{AA''}{B''B},\ \frac{BA'}{A'C}=\frac{B''B}{CC''},\ \frac{CB'}{AB'}=\frac{CC''}{AA''},$$

also

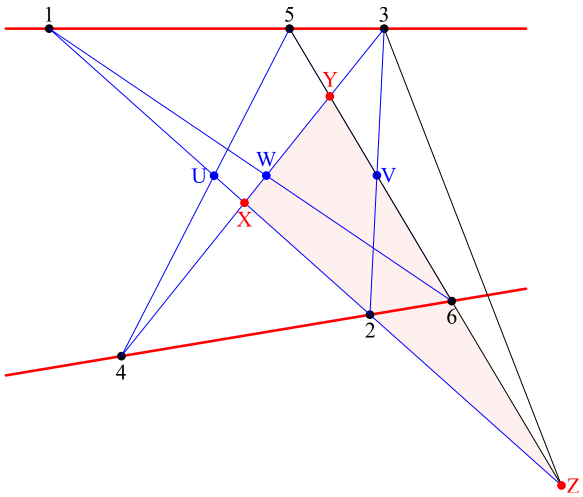
$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=\left(\frac{AA''}{B''B}\right)\cdot\left(\frac{B''B}{CC''}\right)\cdot\left(\frac{CC''}{AA''}\right)=1.$$



Beweis der Umkehrung: Es gelte $\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=-1$. Nimmt man an, dass A‘, B‘, C‘ nicht kollinear sind, so schneide A’C‘ die Seite AC in B*. Dann gilt $\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB^*}{B^*A}=1$, also $\frac{CB'}{B'A}=\frac{CB^*}{B^*A}$, woraus $B'=B^*$ folgt.

Beweis des Satzes von PAPPUS

Es gibt noch die Schnittpunkte $X=12\cap 34,\ Y=34\cap 56,\ Z=56\cap 12$.



Zum Beweis des Satzes von PAPPOS ist zu zeigen, dass bezüglich des Dreiecks XYZ nach der Umkehrung des Satzes von MENELAOS die Relation

$$\frac{XU}{UZ}\cdot\frac{ZV}{VY}\cdot\frac{YW}{WX}=1$$

gilt. Mit den Transversalen U45, V23 und W61 gilt nach dem Satz von MENELAOS

$$U45:\ \frac{XU}{UZ}\cdot\frac{Z5}{5Y}\cdot\frac{Y4}{4X}=1;\quad \frac{XU}{UZ}=\frac{5Y}{Z5}\cdot\frac{4X}{Y4}$$

$$V23:\ \frac{X2}{2Z}\cdot\frac{ZV}{VY}\cdot\frac{Y3}{3X}=1;\quad \frac{ZV}{VY}=\frac{3X}{Y3}\cdot\frac{2Z}{X2}$$

$$W61:\ \frac{YW}{WX}\cdot\frac{X1}{1Z}\cdot\frac{Z6}{6Y}=1;\quad \frac{YW}{WX}=\frac{1Z}{X1}\cdot\frac{6Y}{Z6}$$

Dann folgt

$$\frac{XU}{UZ}\cdot\frac{ZV}{VY}\cdot\frac{YW}{WX}=\left(\frac{5Y}{Z5}\cdot\frac{4X}{Y4}\right)\cdot\left(\frac{3X}{Y3}\cdot\frac{2Z}{X2}\right)\cdot\left(\frac{1Z}{X1}\cdot\frac{6Y}{Z6}\right)=\frac{3X\cdot 4X\cdot 5Y\cdot 6Y\cdot 1Z\cdot 2Z}{X1\cdot X2\cdot Y3\cdot Y4\cdot Z5\cdot Z6}$$

Andererseits liefern die Transversalen 135 und 246 die Beziehungen

$$135:\ \frac{X1}{1Z}\cdot\frac{Z5}{5Y}\cdot\frac{Y3}{3X}=1;\quad 246:\ \frac{Z6}{6Y}\cdot\frac{Y4}{4X}\cdot\frac{X2}{2Z}=1$$

und deren Produkt

$$\frac{X1 \cdot X2 \cdot Y3 \cdot Y4 \cdot Z5 \cdot Z6}{X3 \cdot X4 \cdot Y5 \cdot Y6 \cdot Z1 \cdot Z2} = 1,$$

so dass sich insgesamt $\frac{XU}{UZ} \cdot \frac{ZV}{VY} \cdot \frac{YW}{WX} = 1$ und damit die Kollinearität von U, V, W ergibt.

Beweise des Satzes von PASCAL

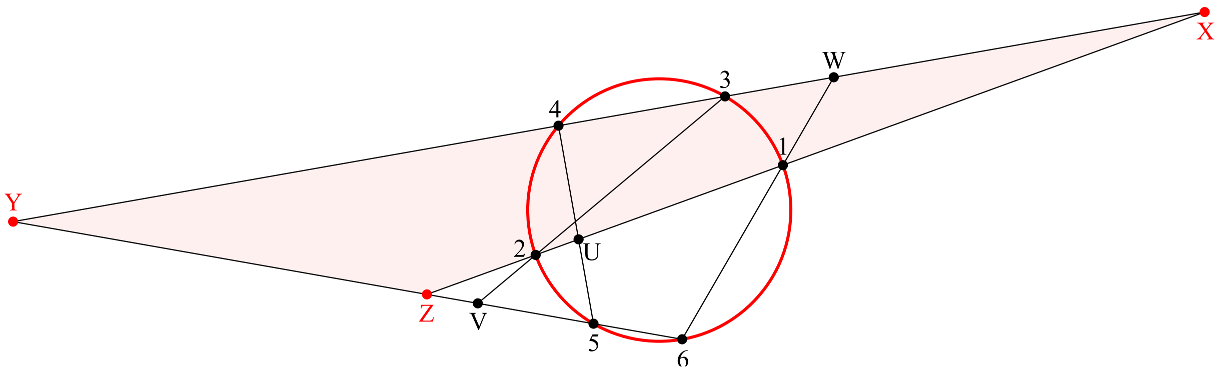
PASCAL hat seinen Satz vermutlich für den Kreis bewiesen, und das reicht auch, da der Kreis projektiv auf andere Kegelschnitte abgebildet werden kann (unter Erhaltung von Inzidenzen und Kollinearität).

Der Beweis des Satzes von PASCAL ist nicht einfach, und aus diesem Grund (man lernt mehr, wenn man Schwierigkeiten überwindet, und man lernt gar nichts, wenn man ihnen aus dem Wege geht) werden hier mehrere Beweise vorgestellt. Der erste orientiert sich am Beweis des Satzes von PAPPOS, verwendet also den Satz des MENELAOS, der zweite verwendet den Umfangswinkelsatz in Verbindung mit dem Satz von CEVA, funktioniert aber nur in manchen Fällen, der dritte ist der neueste und stellt einen Zusammenhang zu zentrischen Streckungen her.

Es gibt auch sehr kurze Beweise des Satzes von PASCAL mit höheren Hilfsmitteln, die jedoch von der Schulmathematik weit entfernt sind.

Erster Beweis des Satzes von PASCAL wie bei Pappos

Wieder werden die Schnittpunkte $X = 12 \cap 34$, $Y = 34 \cap 56$, $Z = 56 \cap 12$ verwendet:



Um die Kollinearität von U, V, W zu zeigen, muss bzgl. Des Dreiecks XYZ die Relation

$$\frac{YV}{VZ} \cdot \frac{ZU}{UX} \cdot \frac{XW}{WY} = 1$$

gelten.

Für die Transversale U45 ist $\frac{Y5}{5Z} \cdot \frac{ZU}{UX} \cdot \frac{X4}{4Y} = 1$, also $\frac{ZU}{UX} = \frac{4Y}{X4} \cdot \frac{5Z}{Y5}$.

Für die Transversale V23 ist $\frac{YV}{VZ} \cdot \frac{Z2}{2X} \cdot \frac{X3}{3Y} = 1$, also $\frac{YV}{VZ} = \frac{2X}{Z2} \cdot \frac{3Y}{X3}$.

Für die Transversale W61 ist $\frac{XW}{WY} \cdot \frac{Y6}{6Z} \cdot \frac{Z1}{1X} = 1$, also $\frac{XW}{WY} = \frac{6Z}{Y6} \cdot \frac{1X}{Z1}$.

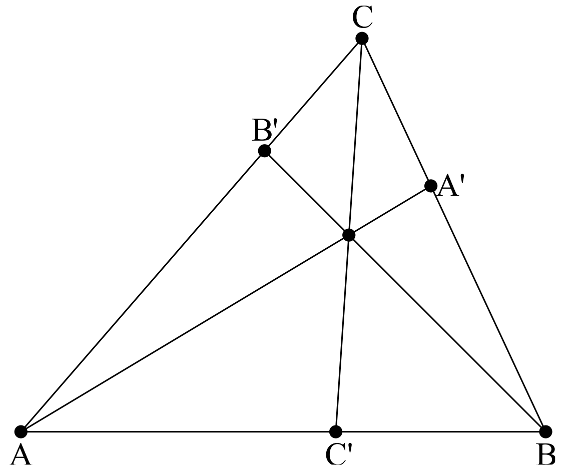
Damit ist $\frac{YV}{VZ} \cdot \frac{ZU}{UX} \cdot \frac{XW}{WY} = \left(\frac{2X}{Z2} \cdot \frac{3Y}{X3}\right) \cdot \left(\frac{4Y}{X4} \cdot \frac{5Z}{Y5}\right) \cdot \left(\frac{6Z}{Y6} \cdot \frac{1X}{Z1}\right) = \frac{1X \cdot 2X \cdot 3Y \cdot 4Y \cdot 5Z \cdot 6Z}{X3 \cdot X4 \cdot Y5 \cdot Y6 \cdot Z1 \cdot Z2}$.

Nach dem Sekantensatz ist $X1 \cdot X2 = X3 \cdot X4$, $Y3 \cdot Y4 = Y5 \cdot Y6$, $Z1 \cdot Z2 = Z5 \cdot Z6$, so dass die Behauptung erfüllt ist.

Ganz allgemein ist dieser Beweis nicht, da X, Y, Z ein Dreieck bilden müssen. Allerdings hat man bei der Wahl von X, Y, Z einige Freiheiten.

Der Satz von CEVA und isogonale Konjugation

Der folgende Beweis des Satzes von PASCAL stützt sich auf den Satz von CEVA in seiner Winkelversion:



AA‘, BB‘ und CC‘ mögen sich in P schneiden. Dann gilt, wenn UVW den Flächeninhalt des Dreiecks UVW bezeichnet:

$$\frac{AC'}{C'B}=\frac{AC'C}{C'BC}=\frac{APC}{PBC}$$

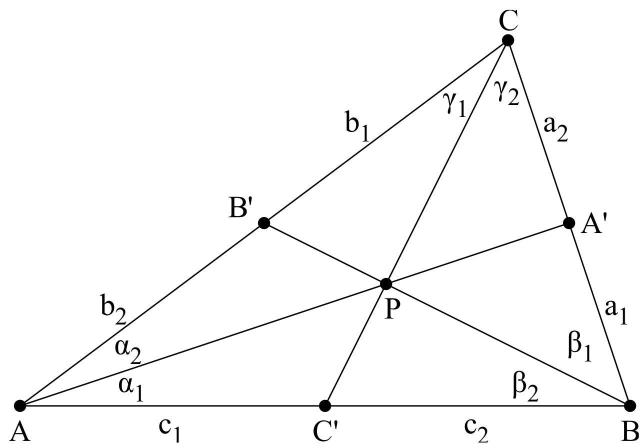
$$\frac{BA'}{A'C}=\frac{BA'A}{A'CA}=\frac{BPA}{PCA}$$

$$\frac{CB'}{B'A}=\frac{CB'B}{B'AB}=\frac{CPB}{PAB}$$

Und damit

$$\frac{AC'\cdot BA'\cdot CB'}{C'B\cdot A'C\cdot B'A}=1.$$

Zum Beweis der Umkehrung nehme man an, dass $\frac{AC'\cdot BA'\cdot CB'}{C'B\cdot A'C\cdot B'A}=1$ gilt und dass AP die Seite BC in A* schneide. Dann gilt $\frac{AC'\cdot BA^*\cdot CB'}{C'B\cdot A^*C\cdot B'A}=1$, woraus $\frac{BA'}{A'C}=\frac{BA^*}{A^*C}$ und damit $A^*=A'$ folgt.



Zur Winkelversion:

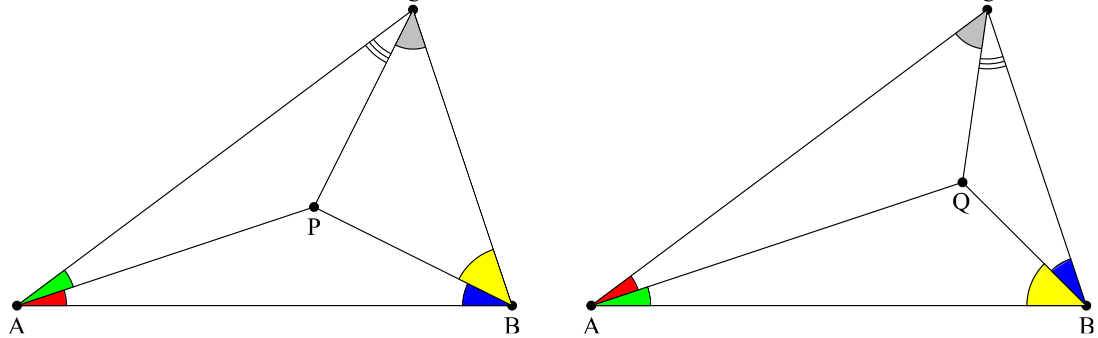
In ABA‘ und AA’C ist $\frac{\sin\alpha_1}{a_1}=\frac{\sin\beta}{AA'}$ und $\frac{\sin\alpha_2}{a_2}=\frac{\sin\gamma}{AA'}$, also

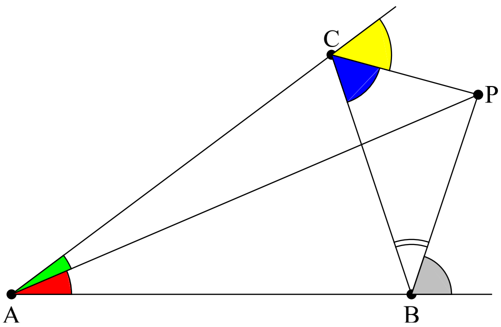
$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{a_1\cdot b}{a_2\cdot c},\quad \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}=\frac{b_1}{b_2}\cdot\frac{c}{a},\quad \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=\frac{c_1}{c_2}\cdot\frac{a}{b}$$

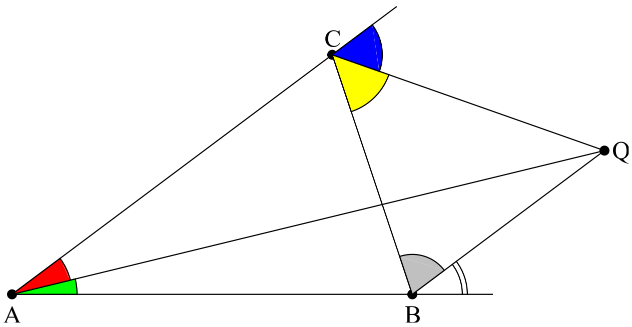
und daher

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1.$$

Insbesondere gilt: Vertauscht man bei A, B, C jeweils die Winkel, so erhält man den zu P isogonal konjugierten Punkt Q. Dies ist auch der Fall, wenn das linke Dreieck zum rechten Dreieck jeweils nur ähnlich ist.

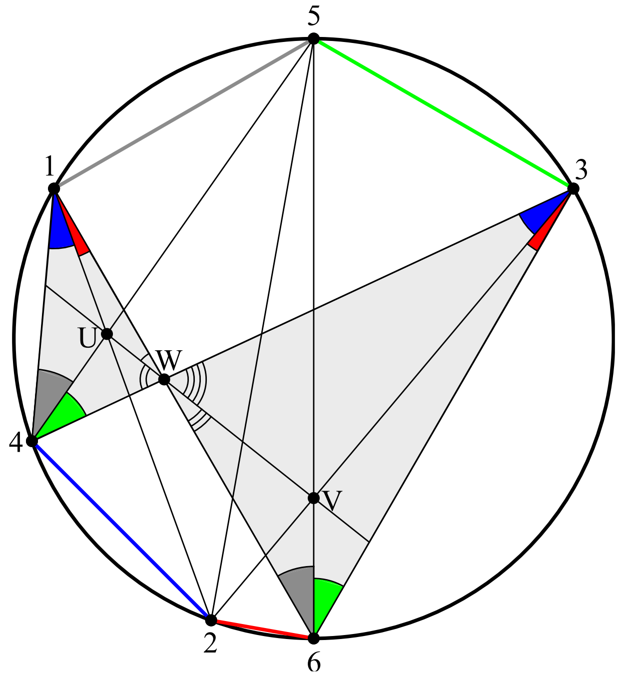






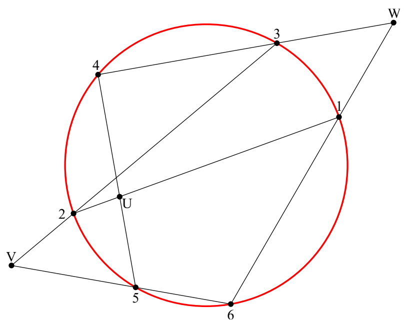
Dieser ist wegen der Winkelversion des Satzes von Ceva schon eindeutig bestimmt, wenn man die Winkel an zwei Eckpunkten vorgibt. Dies bleibt auch dann richtig, wenn das linke Dreieck zum rechten nur ähnlich ist.

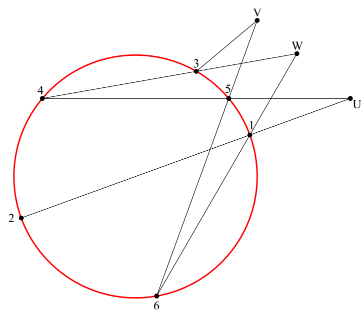
Zweiter Beweis des Satzes von PASCAL mit Hilfe des Umfangswinkelsatzes und des Satzes von CEVA



Falls U, V, W im Kreisinneren liegen, liefert der Umfangswinkelsatz in Verbindung mit der Winkelversion des Satzes von CEVA einen einfachen Beweis:
Winkel gleicher Farbe links haben gleiche Größe, daher sind die Dreiecke 4W1 und W63 zueinander ähnlich. Insbesondere sind U und V zueinander isogonal konjugiert. Daher stimmen der drei- und der viergestrichene Winkel in ihrer Größe überein, was den Satz von PASCAL beweist.

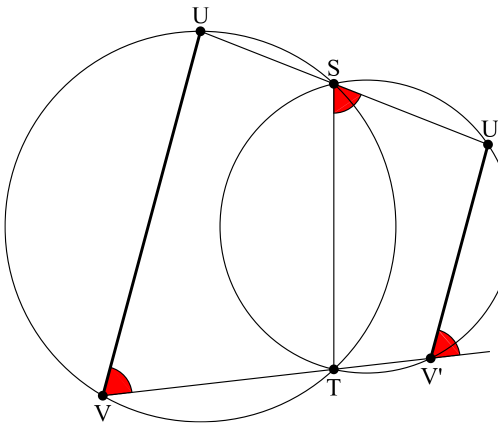
Nun liegen U, V, W nicht immer alle im Kreis, man muss daher lästige Fallunterscheidungen durchführen.

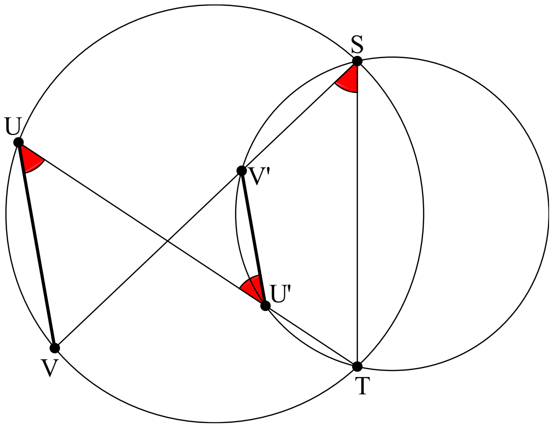




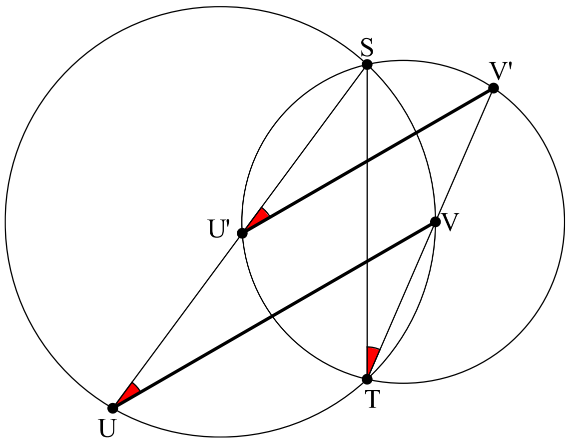
Dritter Beweis des Satzes von PASCAL

1993 gab Jan van YZEREN einen „einfachen“ Beweis[2] an, der einen einfachen Hilfssatz erfordert.



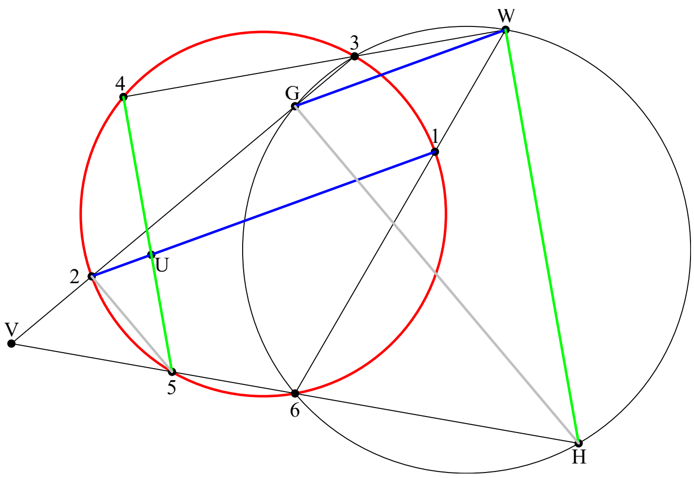


UV sei eine beliebige Sehne und U’V‘ wird nach Abbildung konstruiert. Die roten Winkel haben jeweils gleiche Größe (Umfangswinkelsatz und Sehnenvierecke), so dass UV zu UVP‘ parallel ist.



Auch hier sind die fetten Strecken zueinander parallel (der Winkel bei T ist Umfangswinkel zu SV und auch zu SV‘.)

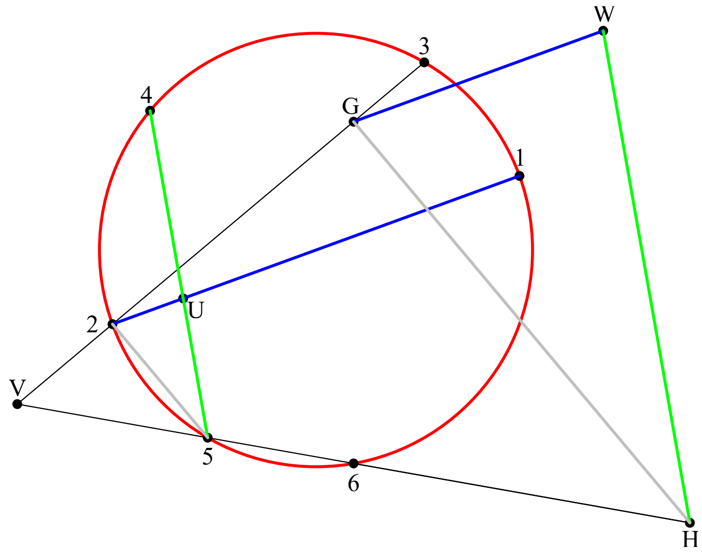
Der eigentliche Beweis hat den Charakter einer „guided tour“; man kann kaum im Voraus jeden Schritt motivieren und einsichtig machen.



Man betrachte den Kreis durch W, 3 und 6.
Um den Hilfssatz anwenden zu können, braucht man zweitere Schnittpunkte.
Der Schnittpunkt des neuen Kreises mit V6 ist H, der Schnittpunkt des neuen Kreises mit V2 ist G.
Damit der Hilfssatz vielfältig anwendbar:
21 ist zu GW parallel und 45 zu HW sowie 25 zu GH.

[2] Jan van Yzeren (1993): A simple proof of Pascal’s hexagon theorem. In: Am. Math. Monthly, December 1993, S. 930-931. Die Grundidee geht wohl auf den dänischen Mathematiker Julius Petersen zurück; sh. Willi Lüssy (1947): Die Sätze von Pascal und Brianchon. In: Elemente der Mathematik, Band II, Nr. 3, S. 49-50.

25 entsteht aus GH durch eine zentrische Streckung mit Zentrum V.



Insbesondere gilt: WH ist parallel zu U5, GW ist parallel zu U2, und GH ist parallel zu 25.
Damit sind die Seiten des Dreiecks GWH parallel zu den Seiten des Dreiecks U25.

Damit gibt es ein Streckzentrum (Strahlensatz-Zentrum), das nach der letzten Graphik mit V übereinstimmt. Daher sind U, W und V kollinear.