Jörg MEYER, Hameln
1. 12. 2020

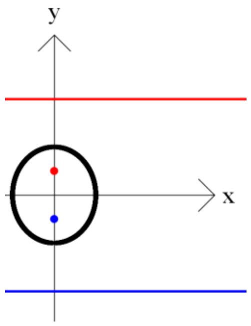
# Von der Parabel zu Ellipse und Hyperbel

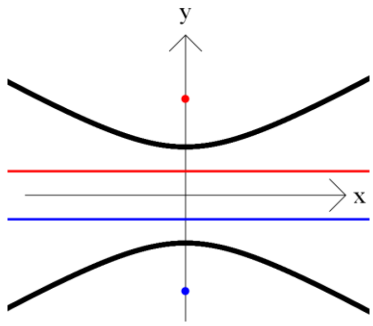
Bekanntlich liegen alle Punkte, deren Abstand zu einem Punkt F und zu einer Geraden g denselben Abstand haben, auf einer *Parabel*. Das führt zur Frage:
Wo liegen alle Punkte P, deren Abstand zu einem Punkt F genau k-mal so groß ist wie zu einer Geraden g?

Man wird das Koordinatensystem so einrichten, dass die x-Achse parallel zu g verläuft und die y-Achse durch F geht. Es erweist sich für $\boxed{k \neq 1}$ als sinnvoll, $F = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \cdot k \end{pmatrix}$ und $g: y = \frac{\sigma}{k}$ zu wählen; dann bekommt man ein übersichtliches Resultat. Für $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .muss $x^2 + (y - \sigma \cdot k)^2 = k^2 \cdot \left(y - \frac{\sigma}{k}\right)^2$ sein.

Daraus folgt $\boxed{\frac{x^2}{1-k^2} + y^2 = \sigma^2}$. Für $0 < k < 1$ stellt das eine *Ellipse* dar (gestauchter Kreis), für $k > 1$ eine *Hyperbel*, die für $k = \sqrt{2}$ rechtwinklig ist.

Man hätte dieselbe Kurvengleichung für $F = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sigma \cdot k \end{pmatrix}$ und $g: y = -\frac{\sigma}{k}$ (in den folgenden Bildern jeweils blau) bekommen.



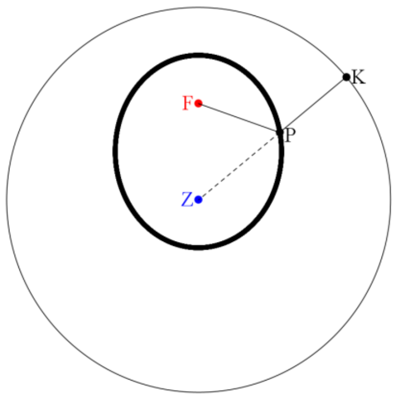




Man hätte die Parabeldefinition auch anders verallgemeinern können, nämlich so, dass man die Leitgerade zu einem Kreis biegt und fragt: Wo liegen alle Punkte $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, die zu $F = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \cdot k \end{pmatrix}$ und einem Kreis um $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sigma \cdot k \end{pmatrix}$ mit dem Radius $2 \cdot \sigma$ denselben Abstand haben?

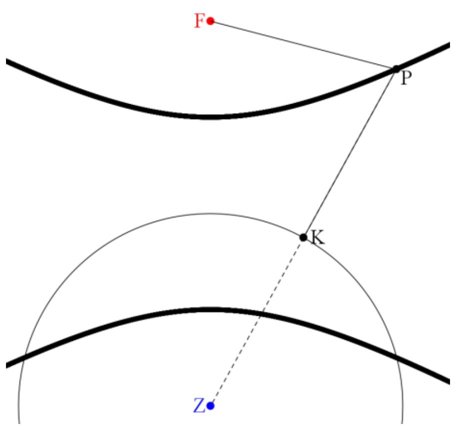
Im *Ellipsen*fall ist $PF = PK = 2 \cdot \sigma - PZ$ bzw.

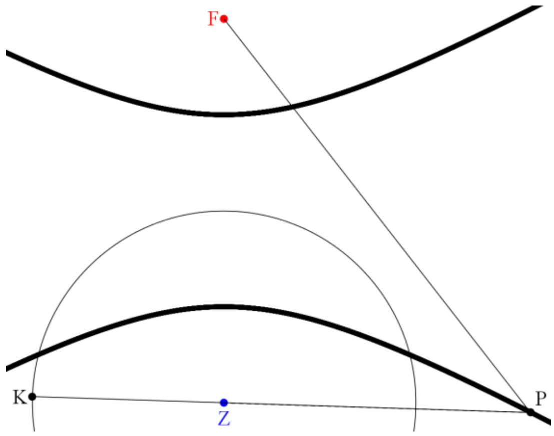
$$\boxed{PF + PZ = 2 \cdot \sigma}.$$

Das ist die gewöhnliche Ellipsen-Definition.




Der *Hyperbel*fall ist aufwändiger:






Links ist $PF = PK = PZ - 2\cdot\sigma$ bzw. $PZ - PF = 2\cdot\sigma$, rechts ist $PF = PK = 2\cdot\sigma + PZ$ bzw. $PF - PZ = 2\cdot\sigma$ (gewöhnliche Hyperbel-Definitionen). Man beachte, dass rechts der Abstand von P zum Kreis nicht der kleinste, sondern der größte (!) ist.

Es muss also $PF = \pm 2\cdot\sigma \pm PZ$ sein (beide plus/minus-Zeichen sind unabhängig voneinander) bzw.

$$\begin{aligned} PF &= \pm 2\cdot\sigma \pm PZ \\ PF^2 - PZ^2 &= 4\cdot\sigma^2 \mp 4\cdot\sigma\cdot PZ \\ -4\cdot y\cdot\sigma\cdot k - 4\cdot\sigma^2 &= \mp 4\cdot\sigma\cdot PZ \\ \pm PZ &= y\cdot k + \sigma \\ x^2 + y^2 + \sigma^2\cdot k^2 &= y^2\cdot k^2 + \sigma^2 \\ x^2 + y^2\cdot\left(1 - k^2\right) &= \sigma^2\cdot\left(1 - k^2\right) \end{aligned}$$

und führt damit zur selben Kurvengleichung.
Für $0 < k < 1$ ist $\sigma\cdot k < -\sigma\cdot k + 2\cdot\sigma$, F liegt also innerhalb des Kreises um Z mit dem Radius $2\cdot\sigma$, anderenfalls liegt F außerhalb.

<u>Exkurs zur Sek I</u>: Hier sind Hyperbeln nur in der Form $x\cdot y = a$ bekannt. Man muss also die Elemente der Aufgabenstellung um 45° drehen. Dazu braucht man den Abstand eines Punktes $Q = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ zur Geraden mit $y = m\cdot x + n$. Deren allgemeiner Punkt ist $P(t) = \begin{pmatrix} t \\ m\cdot t + n \end{pmatrix}$. Der gesuchte Abstand ist der Abstand von Q zum Lotfußpunkt L. Da QP(t) die Steigung $\frac{m\cdot t + n - v}{t - u}$ hat, ist genau dann L=P(t), wenn $\frac{m\cdot t + n - v}{t - u}\cdot m = -1$ ist, was auf $t = \frac{m\cdot v + u - m\cdot n}{m^2 + 1}$ führt, sodass sich der gesuchte Abstand d aus $d = \frac{|v - m\cdot u - n|}{\sqrt{m^2 + 1}}$ ergibt.

Sucht man alle Punkte, deren Abstand zu $F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$ $\sqrt{2}$-mal so groß ist wie der Abstand zur Geraden mit $y = x$, führt das auf $x^2 + (y - f)^2 = 2\cdot\frac{x^2 - 2\cdot x\cdot y + y^2}{2}$ bzw. auf $\boxed{y\cdot(x - f) = -\frac{f^2}{2}}$. Diese Gleichung ist auch in der Sek I interpretierbar.