Jörg MEYER, Hameln

5. 5. 2022

Eine Kurvendiskussion mit CAS

oder:

Was alles in der Parabel steckt

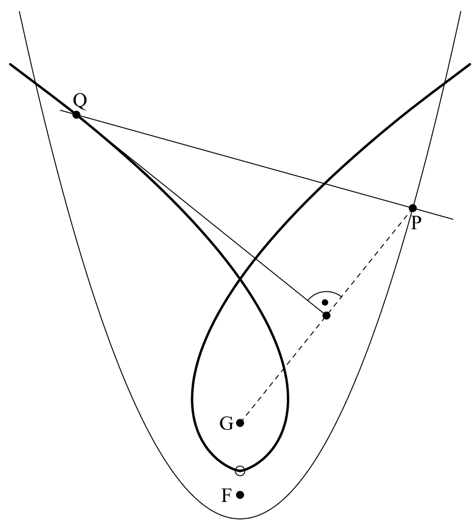
Es geht um zwei Kurvenscharen, deren Entstehung geschildert wird. Die Graphen werfen Fragen auf, zu deren Beantwortung ein CAS hilfreich ist.

Bekanntlich lassen sich alle Punkte auf der Mittelsenkrechten zu den Punkten A und B dadurch charakterisieren, dass sie zu A und zu B den gleichen Abstand haben. Alle Punkte auf den Winkelhalbierenden zu den Geraden g und h lassen sich dadurch charakterisieren, zu g und zu h den gleichen Abstand zu haben. Schließlich ist bekannt, dass alle Punkte auf einer Parabel dadurch charakterisiert werden, zu einem festen Punkt (dem Brennpunkt) und zu einer festen Geraden (der Leitgeraden) den gleichen Abstand zu haben.

Punkt/Parabel

Da liegt die Frage nahe, was man über alle Punkte sagen kann, die zu einer *Parabel* und zu einem festen *Punkt* G denselben Abstand haben. Um dies Problem übersichtlich zu halten, soll G auf der Parabelachse liegen.

Gesucht sind also alle Punkte Q, die vom Punkt $G = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$ und der Parabel mit $y = x^2$ den gleichen Abstand haben. Dabei soll mit „Abstand zu Parabel“ stets der kürzeste (senkrechte) Abstand gemeint sein.

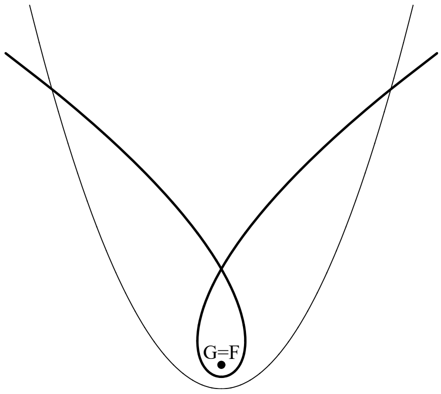


Ein beliebiger Punkt auf der Parabel ist $P = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$; die dortige Normale hat die Gleichung $y = \frac{-1}{2 \cdot t} \cdot (x - t) + t^2$. Die Mittelsenkrechte von GP hat die Gleichung $y = \frac{t}{g - t^2} \cdot \left(x - \frac{t}{2} \right) + \frac{g + t^2}{2}$. Beide Geraden schneiden einander in $Q_g(t) = \frac{1}{t^2 + g} \cdot \begin{pmatrix} -t \cdot \left(t^4 - 2 \cdot g \cdot t^2 + g^2 - g \right) \\ \frac{1}{2} \cdot \left(3 \cdot t^4 + t^2 + g^2 \right) \end{pmatrix}$. Die nebenstehende Kurve gehört zu $g = 1$; zusätzlich ist der Brennpunkt F der Normalparabel eingetragen.

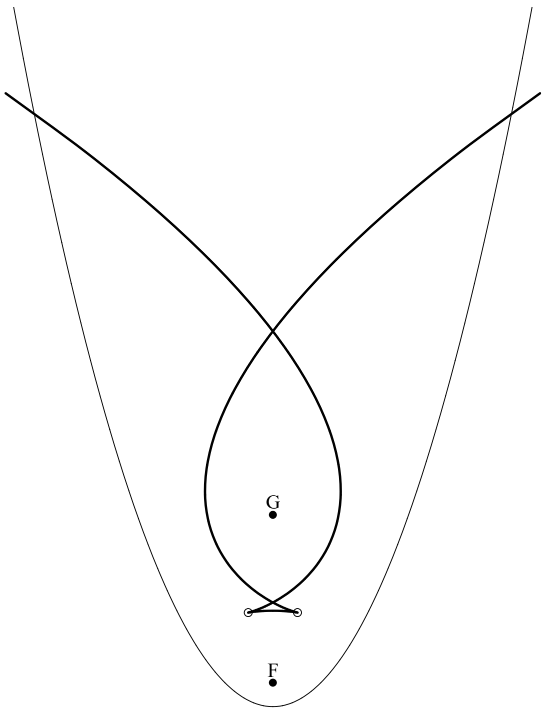
$Q_g(-t)$ und $Q_g(t)$ liegen stets symmetrisch zur Hochachse, und es ist $Q_g(0)=\frac{1}{g}\cdot\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\cdot g^2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot G$

(Hohlkreis). Für $g=1$ erhält man wegen $Q_1(t)=\frac{1}{t^2+1}\cdot\begin{pmatrix}-t^3\cdot\left(t^2-2\right)\\ \frac{1}{2}\cdot\left(3\cdot t^4+t^2+1\right)\end{pmatrix}$ einen Doppelpunkt bei

$t=\pm\sqrt{2}$ und einen Dreifachpunkt bei $t=0$.



Es kann auch $G=F$ sein; man bekommt dann einen Doppelpunkt.



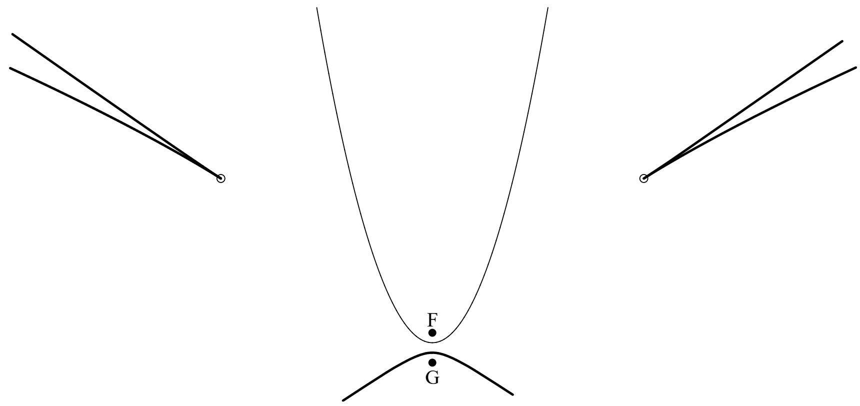
Für $g=2$ hat man zwei Doppelpunkte, nämlich wegen $Q_2(t)=\frac{1}{t^2+2}\cdot\begin{pmatrix}-t\cdot\left(t^4-4\cdot t^2+2\right)\\ \frac{1}{2}\cdot\left(3\cdot t^4+t^2+4\right)\end{pmatrix}$ bei $x=0$ für $t^4-4\cdot t^2+2=0$, also für $t=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2}}$. Außerdem gibt es bei $g=2$ zwei Spitzen, bei denen x- und y-Koordinate lokal extremal sind. Das ist für $t=\pm\frac{\sqrt{\sqrt{42}-6}}{\sqrt{3}}$ der Fall (Hohlkreise).

Wann gibt es zwei Doppelpunkte? Wegen $Q_g(t)=\frac{1}{t^2+g}\cdot\begin{pmatrix}-t\cdot\left(t^4-2\cdot g\cdot t^2+g^2-g\right)\\ \frac{1}{2}\cdot\left(3\cdot t^4+t^2+g^2\right)\end{pmatrix}$ hat man bei

$x=0$ die biquadratische Gleichung $\left(t^2\right)^2-2\cdot g\cdot t^2+g^2-g=0$ mit der Lösung $t^2=g\pm\sqrt{g}$ zu

betrachten; für $g=1$ hat man $t=0$ (sogar dreifach) und $t=\pm\sqrt{2}$. Für $g>0$ hat man außer für $g=1$ stets zwei Doppelpunkte.

Wann gibt es Spitzen? Die Ableitungen der x- und der y-Koordinate von $Q_g(t)$ müssen übereinstimmende Nullstellen haben, was für $g > 1$ und für $g < 0$ der Fall ist.

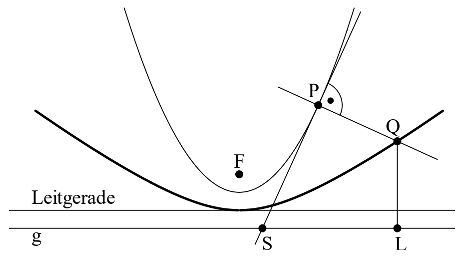


Bei $g = -\frac{1}{2}$ bekommt man die beiden Spitzen für $t = \pm\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$ (Hohlkreise).

$$Q_0(t) = \begin{pmatrix} -t^3 \\ \frac{1}{2}\cdot\left(3\cdot t^2+1\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t^3 \\ \frac{3}{2}\cdot t^2 \end{pmatrix}$$ beschreibt die (verschobene und gestreckte) NEIL'sche Parabel.

Gerade/Parabel

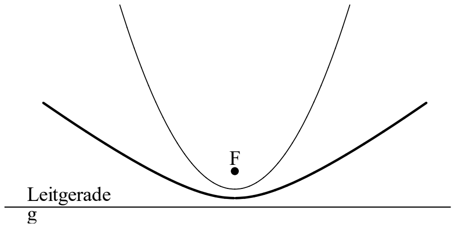
Untersucht man alle Punkte Q, die von der *Parabel* und einer (der Einfachkeit halber) zur Leitgeraden parallelen *Geraden* g mit $y = g$ denselben Abstand haben, so gehört zu jedem Parabelpunkt $P = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ der Schnittpunkt $S = \begin{pmatrix} \frac{g+t^2}{2\cdot t} \\ g \end{pmatrix}$ der Tangente in P mit g. Q liegt auf der Winkelhalbierenden zu g und der Tangente in P; diese hat für *positive* Werte von t mit $s = \sqrt{4\cdot t^2+1}$ die Steigung $m = \tan\left(\frac{\arctan(2\cdot t)}{2}\right) = \frac{s-1}{2\cdot t}$.



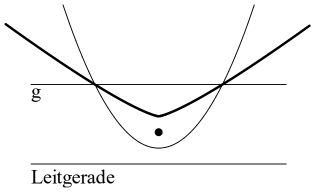
Q ist dann der Schnittpunkt dieser Winkelhalbierenden mit $y = m\cdot\left(x - \frac{g+t^2}{2\cdot t}\right) + g$ und der Normalen zu P mit $y = \frac{-1}{2\cdot t}(x-t)+t^2$.

Der Graph gehört zu $g = -0.5$.

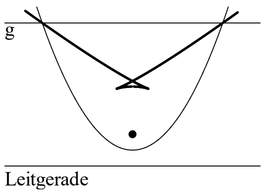
Mit $s^2 = 1+4\cdot t^2$ und mit $r = g + s\cdot t^2$ ist das Ergebnis $Q_g(t) = \frac{1}{2\cdot t}\cdot\begin{pmatrix} r+t^2-s\cdot g \\ \frac{r\cdot(s-1)}{2\cdot t} \end{pmatrix}$. Die Kurve ist natürlich zur Parabelachse symmetrisch und für $t = 0$ nicht definiert.



Die Gerade g kann mit der Leitgeraden übereinstimmen.



Liegt g oberhalb von F, hat man die nebenstehende Gestalt ($g = 1$).



Für $g = 2$ hat man die nebenstehende Kurve mit einem Doppelpunkt und zwei Spitzen.
Auch hier liegen folgende Fragen nahe: Für welche Werte von g gibt es einen Doppelpunkt oder Spitzen?