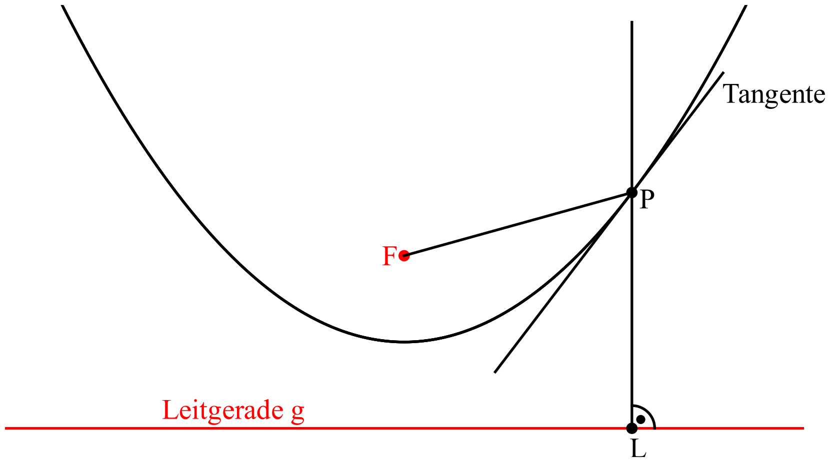
Jörg MEYER, Hameln 3. November 2025

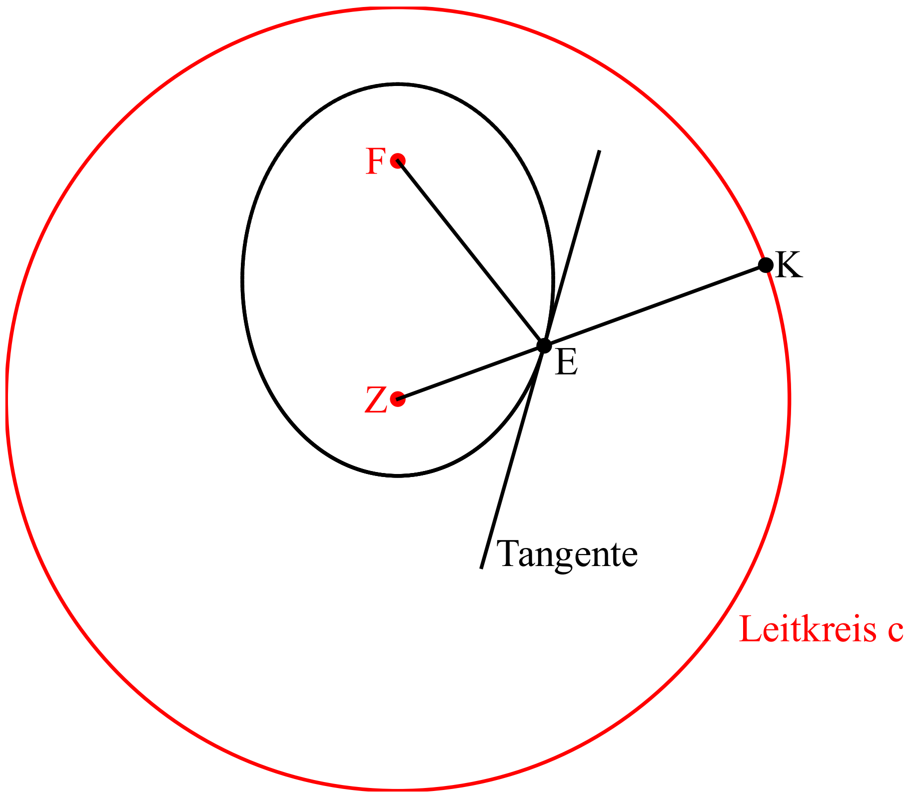
Kegelschnitt-Konstruktionen



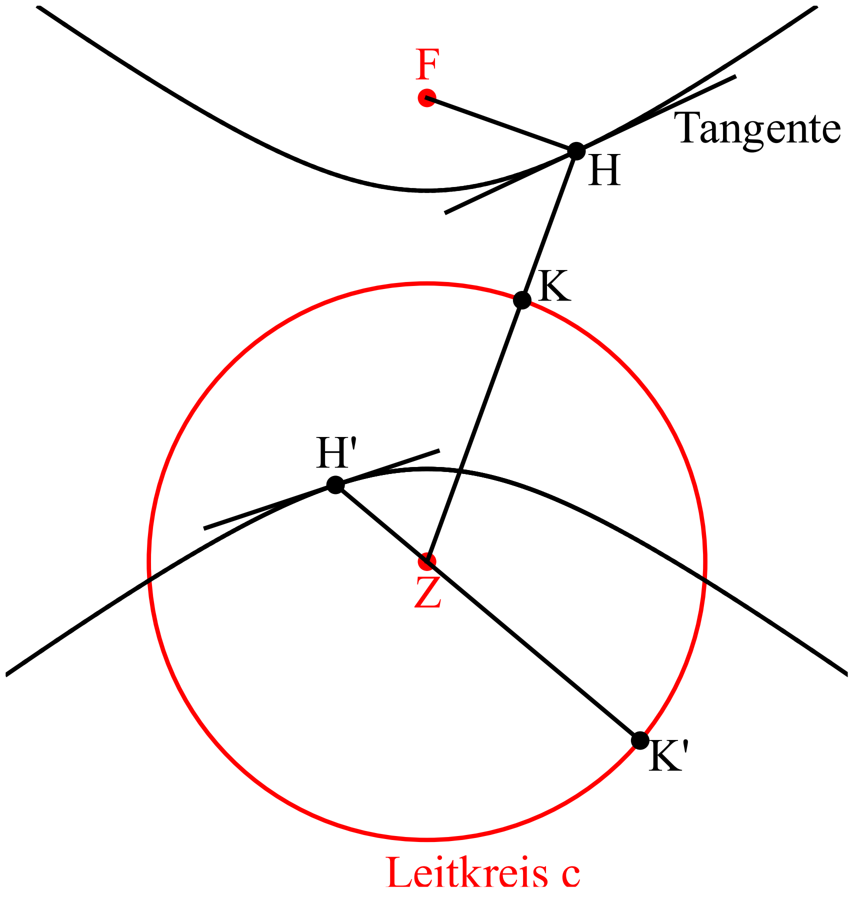
Eine Parabel besteht aus allen Punkten, die den gleichen Abstand zu einem Brennpunkt F und einer Leitgeraden g haben, wobei F nicht auf g liegt. Zur Konstruktion wandere L auf g; die Mittelsenkrechte zu L und F schneidet die Senkrechte zu g durch L in einem Parabelpunkt P und ist Tangente zu P.

Dies lässt sich auf mehrere Arten verallgemeinern:

Erste Möglichkeit: Man krümmt die Leitgerade zu einem Leitkreis (mit Zentrum Z und Radius r) und zwar entweder hin zu F oder weg von F.

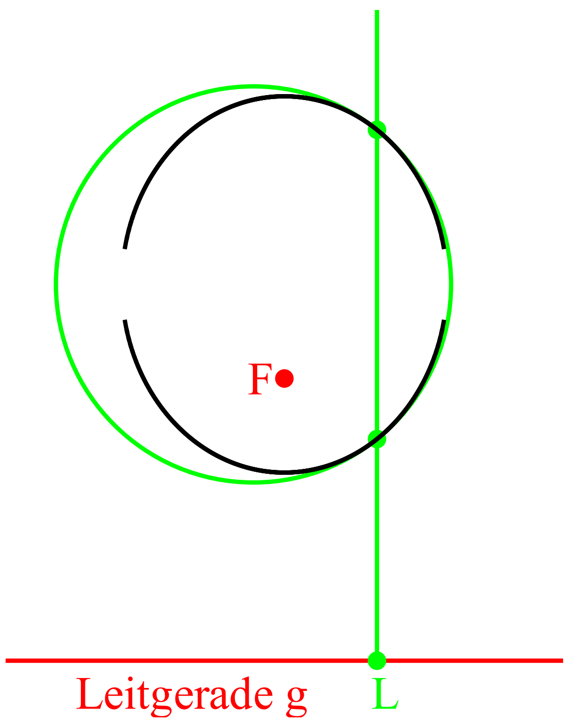


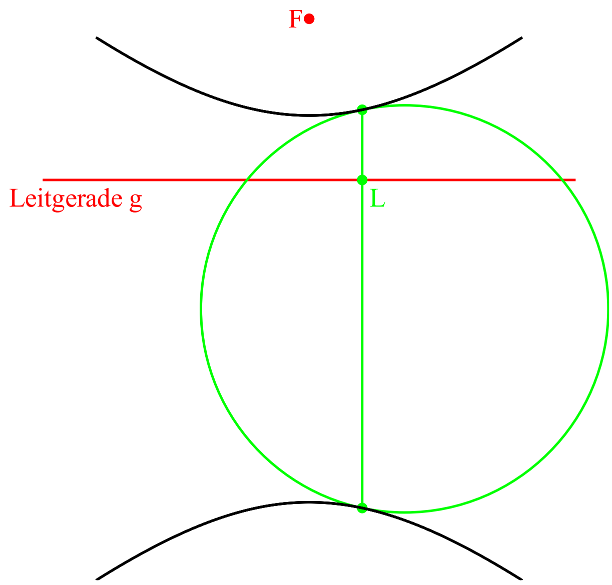
Liegt F innerhalb des Leitkreises c, bekommt man eine Ellipse. Diese besteht aus allen Punkten, die zu F und zu c gleichen Abstand haben. Die Konstruktion überträgt sich fast wörtlich: K wandere auf c; die Mittelsenkrechte zu K und F schneidet ZK in einem Ellipsenpunkt E und ist Tangente zu E. Aus $EF = EK = r - EZ$ folgt $EF + EZ = r$, also die übliche Ellipsen-Definition.



Liegt F außerhalb des Leitkreises c, bekommt man eine Hyperbel. Diese besteht aus allen Punkten, die zu F und zu c gleichen Abstand haben. Die Konstruktion überträgt sich wörtlich: K wandere auf c; die Mittelsenkrechte zu K und F schneidet ZK in einem Hyperbelpunkt H und ist Tangente zu H. Dies ist bemerkenswert für gewisse Kreispunkte K‘: Hier ist der Abstand zum Leitkreis nicht der minimale Abstand, sondern der maximale. Aus $HF = HK = HZ - r$ und $H'F = H'K' = H'Z + r$ folgt $HZ - HF = r$ und $H'F - H'Z = r$, also die übliche Hyperbel-Definition.

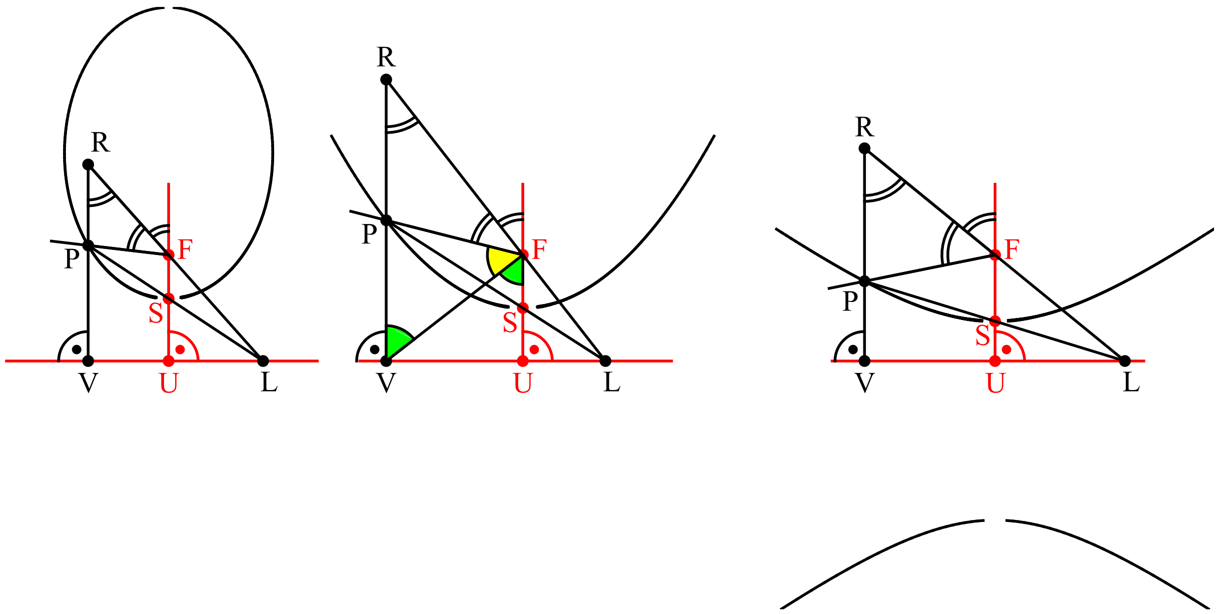
Zweite Möglichkeit: Man verallgemeinert die Parabelbeziehung $\frac{\text{dist}(P,F)}{\text{dist}(P,g)} = 1$ zu $\frac{\text{dist}(P,F)}{\text{dist}(P,g)} = \varepsilon$. Auch damit lässt sich die Parabelkonstruktion wiederum fast wörtlich übertragen: L wandere auf der Leitgeraden g. Die (grüne) Senkrechte zu g durch L schneidet den zu L, F und ε gehörigen (grünen) Apolloniuskreis in zwei Kurvenpunkten. Links führt $\varepsilon = 0{,}5$ zu einer Ellipse, rechts führt $\varepsilon = 1{,}5$ zu einer Hyperbel..





Allerdings ist der Apolloniuskreis in der Schule kaum noch bekannt. Man braucht ihn aber auch gar nicht: Besant[1] beschreibt eine Konstruktion mit Hilfe der Strahlensätze, denn einen Punkt S auf der Lotgeraden zu g durch F kann man leicht konstruieren (und wenn man den verändert, wird aus der Ellipse eine Parabel, dann eine Hyperbel oder umgekehrt).

Die Punkte P eines Kegelschnitts zur (roten) Leitlinie g und zum (roten) Brennpunkt F erfüllen die Bedingung $\frac{\text{dist}(P,F)}{\text{dist}(P,g)}=\varepsilon$; für $\varepsilon<1$ hat man eine Ellipse (links), für $\varepsilon=1$ eine Parabel (Mitte), und für $\varepsilon>1$ eine Hyperbel (rechts).



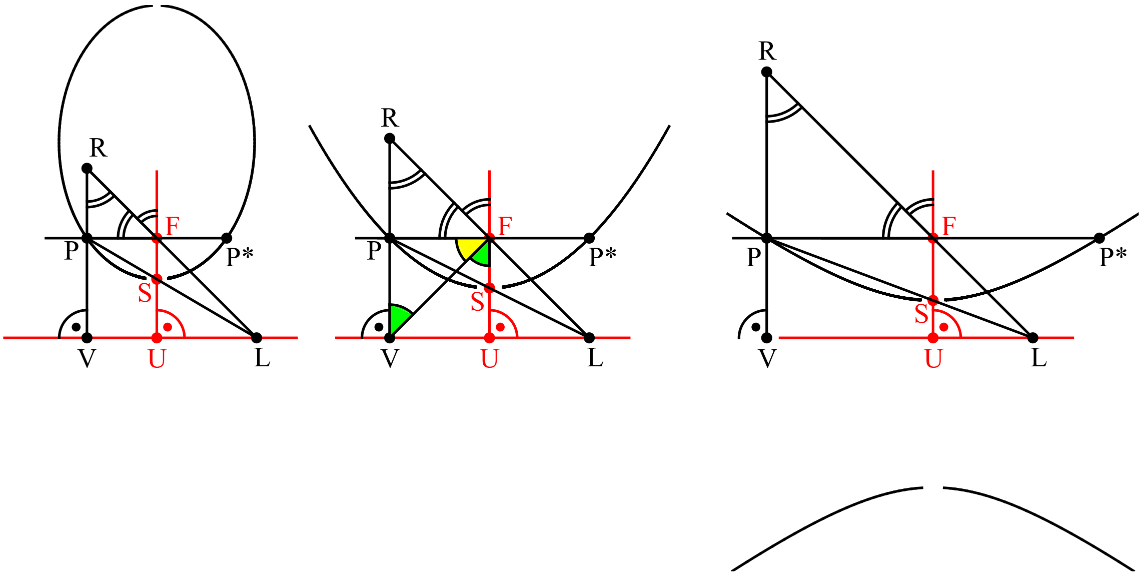
Es ist einfach, den Scheitelpunkt S zu konstruieren. Ist U der Lotfußpunkt von F auf g, so ist $\frac{\text{dist}(S,F)}{\text{dist}(S,U)}=\frac{SF}{SU}=\varepsilon$. Der Punkt L wandere auf der Leitgeraden g. Für jede Parallele VR zu UF ist $\varepsilon=\frac{SF}{SU}=\frac{PR}{PV}$. Wie bekommt man die „richtige“ Parallele VR?

Spiegelt man UF an LS, sind die blauen Winkel von gleicher Größe, und FRT ist gleichschenklig. Dies hat $PR=PF$ zur Folge und damit $\varepsilon=\frac{SF}{SU}=\frac{PF}{PV}$. Daher ist P Punkt des Kegelschnitts.

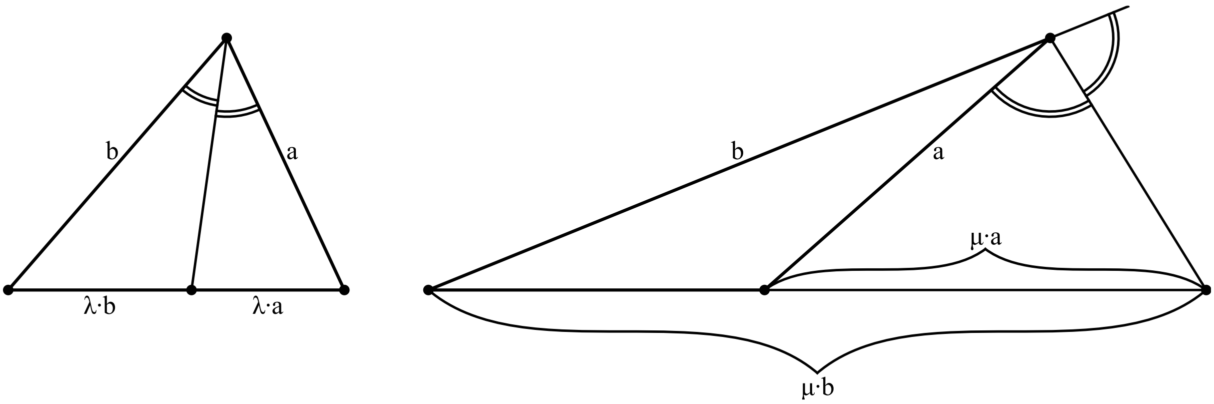
Im (mittleren) Fall der Parabel haben wegen $PF=FU$ der gelbe und der grüne Winkel bei F gleiche Größe.

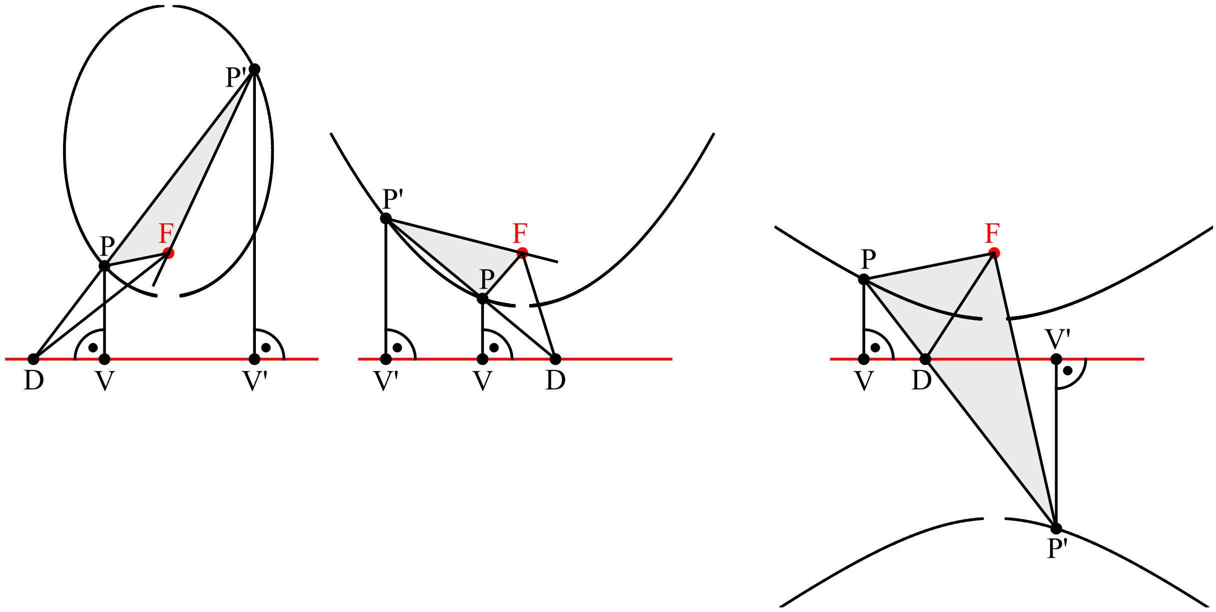
Ist $FU=UL$, so hat der zweigestrichene Winkel die Größe 45°, und FP steht auf FU senkrecht. Spiegelt man P an F, so liegt der Spiegelpunkt P* wieder auf der Kurve. PP* ist das latus rectum.

[1] W. H. Besant (^{9}1895):Conic Sections treated geometrically. London: George Bell and Sons.

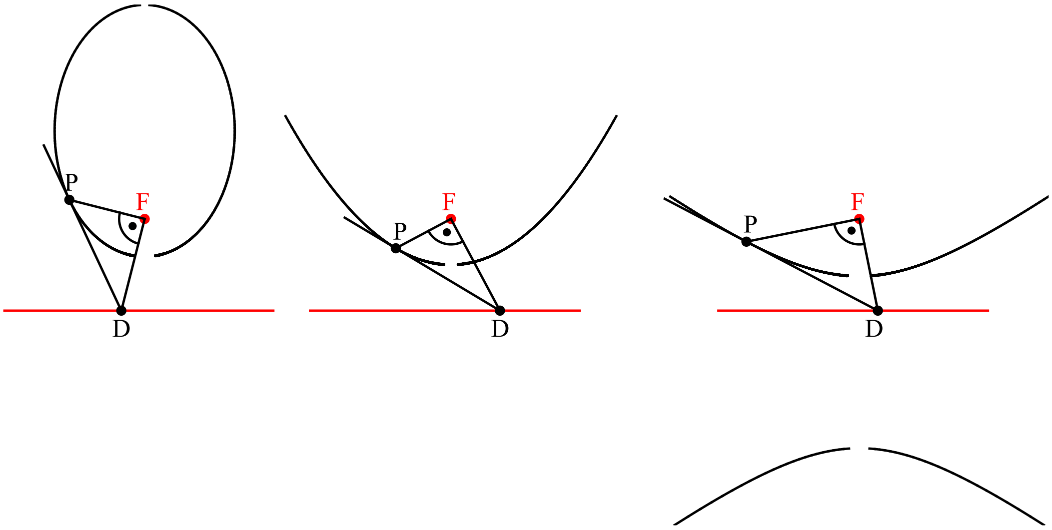


Sind P und P‘ zwei Kurvenpunkte und ist D der Schnitt von PP‘ mit der Leitlinie, so halbiert DF den Außen oder Innenwinkel bei F im Dreieck PP’F, denn $\frac{PF}{P'F}=\frac{PV}{P'V'}$ und $\frac{PV}{P'V'}=\frac{PD}{P'D}$ führen zu $\frac{PF}{P'F}=\frac{PD}{P'D}$, also zur Winkelhalbierenden-Eigenschaft. Zur Erinnerung sei diese im Bild erläutert:





Wandert P‘ auf P zu, wird aus der Sekante PP‘ die Tangente in P. Sie schneidet g in D, die Winkelhalbierende zu FPP‘ durch F ist PF, und darauf steht DF senkrecht. Dies begründet die Tangenten-Konstruktion:



Damit lassen sich die Kegelschnitte und deren Tangenten einheitlich konstruieren.

Didaktischer Kommentar: Die letzte Konstruktion mit dem Strahlensatz hat zwei Vorteile:

Die Tangenten-Eigenschaft ist unmittelbar klar, da die Tangente als Grenzgerade zu Sekanten aufgefasst wird. Bei der Leitkreis-Konstruktion benötigt man für die Tangenten-Eigenschaft eine Hilfs-Überlegung.

Die Konstruktion ist für alle 3 Kegelschnitt-Typen einheitlich, und man kann durch Variation von S zwischen den 3 Typen hin- und herwechseln unter Einschluss der Parabel.