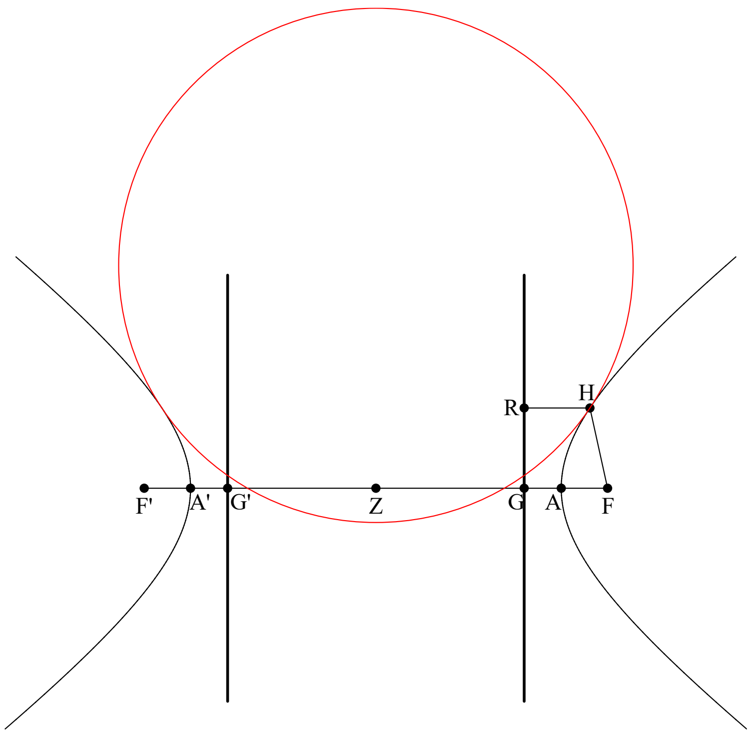
Jörg MEYER, Hameln 19. 12. 2023

Schnitt zweier Kegelschnitte mit gemeinsamem Brennpunkt

Hyperbeln mit gemeinsamem Brennpunkt

Man habe drei (nicht kollineare) Punkte F_1, F_2, F_3. Gesucht sind die Punkte S mit $F_1S - F_2S = 2 \cdot a_{12}$, $F_3S - F_2S = 2 \cdot a_{23}$. S ist mithin Schnittpunkt zweier Hyperbeln mit gemeinsamem Brennpunkt F_2.

Isaac NEWTON hat gezeigt[1], wie man in diesem Fall den Schnittpunkt mit Zirkel und Lineal konstruieren kann:



Koordinatisierung einer Hyperbel:

$Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$, $F' = \begin{pmatrix} -f \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$

Leitgerade: $x = g = \frac{a^2}{f}$, $G = \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}$

Dann ist

$ZG = \frac{a^2}{f}$, $GF = f - \frac{a^2}{f} = \frac{f^2 - a^2}{f} = \frac{b^2}{f}$.

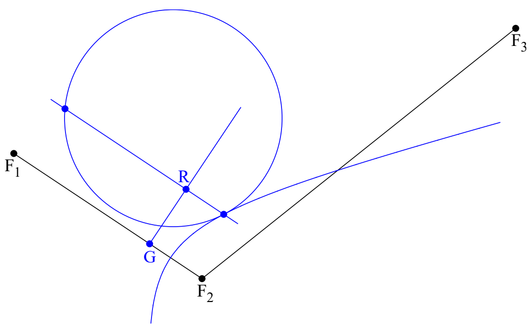
Gegeben seien F‘ und F sowie die Differenz $F'H - FH = 2 \cdot a$. Damit hat man Z, A‘ und A sowie G.

Es sei R auf der Leitgerade beliebig. Die Senkrechte zur Leitgerade durch R schneidet den Apolloniuskreis zu R und F mit dem Teilverhältnis

$\frac{RH}{HF} = \frac{GA}{AF} = \frac{a - \frac{a^2}{f}}{f - a} = \frac{a}{f} = \frac{A'A}{F'F}$ in den Hyperbel-Punkten H.

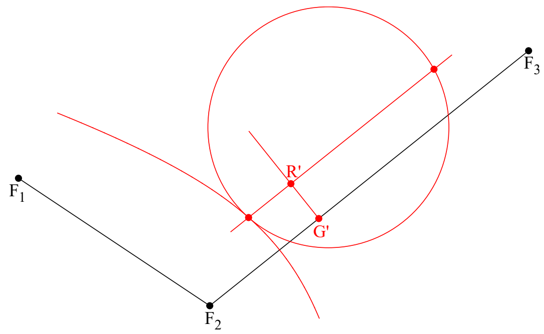
Zurück zum Ausgangsproblem:

Zur ersten Hyperbel gehören die Brennpunkte F_1 und F_2, das Zentrum $Z_{12} = \frac{F_1 + F_2}{2}$ und mit $F_1F_2 = 2 \cdot f_{12}$ und $b_{12}^2 = f_{12}^2 - a_{12}^2$ der Schnittpunkt $G = \frac{b_{12}^2 \cdot Z_{12} + a_{12}^2 \cdot F_2}{f_{12}^2}$ der Leitgeraden zu F_2 mit F_1F_2. Rechts wird nur der Hyperbelast gezeichnet, dessen Punkte von F_1 weiter entfernt sind als von F_2.

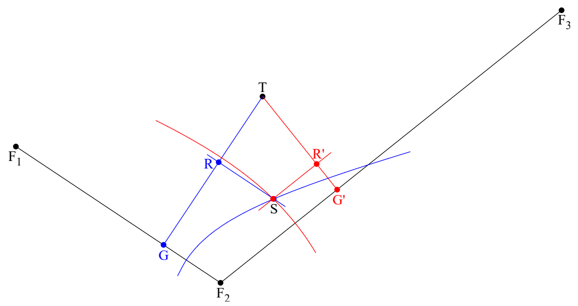


[1] Newton, Principia, book I, section IV, Lemma 16.

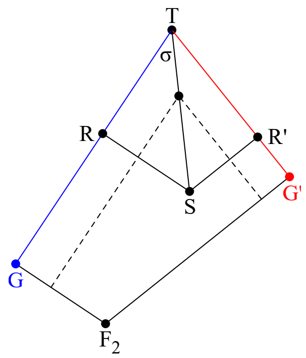
Zur zweiten Hyperbel gehören die Brennpunkte F_2 und F_3, das Zentrum $Z_{23} = \frac{F_2 + F_3}{2}$ und mit $F_2F_3 = 2 \cdot f_{23}$ und $b_{23}^2 = f_{23}^2 - a_{23}^2$ der Schnittpunkt $G' = \frac{b_{23}^2 \cdot Z_{23} + a_{23}^2 \cdot F_2}{f_{23}^2}$ der Leitgeraden zu F_2 mit F_2F_3.
Rechts wird nur der Hyperbelast gezeichnet, dessen Punkte von F_3 weiter entfernt sind als von F_2.



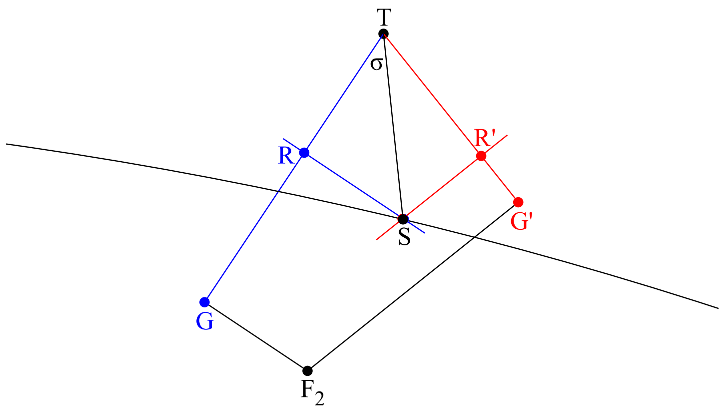
Die (zu F_2 gehörigen) Leitgeraden zu F_1 und F_2 und zu F_2 und F_3 schneiden sich in T.
Die Lage der Punkte R auf GT und R‘ auf G’T kennt man noch nicht, auch nicht die Lage von S.



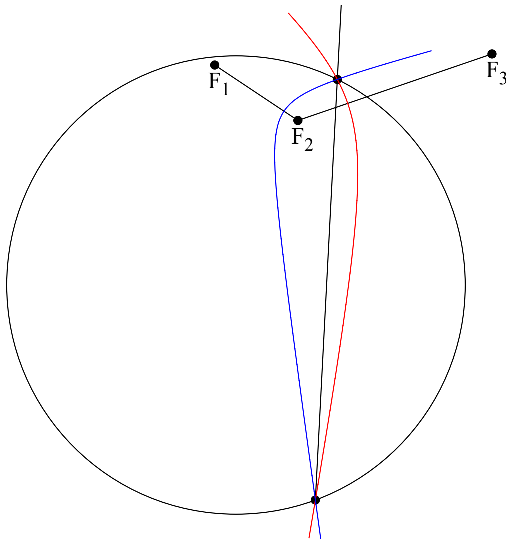
Es ist $\frac{SR}{SF_2} = \frac{2 \cdot a_{12}}{F_1F_2}$ und $\frac{SR'}{SF_2} = \frac{2 \cdot a_{23}}{F_2F_3}$. Damit kennt man $\frac{SR}{SR'} =: v$ und kann damit einen Punkt auf der Geraden g durch T und S konstruieren (obwohl man S noch nicht kennt). Dazu konstruiert man zwei (gestrichelte) Parallelen zu den Leitgeraden im passenden Abstandsverhältnis (die Parallele zu GT hat den Abstand v, und die Parallele zu G’T hat den Abstand 1); deren Schnittpunkt liegt auf g.



Damit hat man σ. Nun ist
$\frac{SR}{SF_2} = \frac{2 \cdot a_{12}}{F_1F_2}$ und $\sin\sigma = \frac{RS}{TS}$, also
$\frac{TS}{SF_2} = \frac{2 \cdot a_{12}}{\sin\sigma \cdot F_1F_2}$, so dass sich S ergibt
als Schnitt der Geraden g mit dem passenden Apolloniuskreis.
Damit hat man S gefunden.



Man bekommt zwei Lösungen.



Anwendung: Kreisberührung

Man hat drei Kreise mit den Mittelpunkten F_1, F_2, F_3 und den Radien r_1, r_2, r_3.

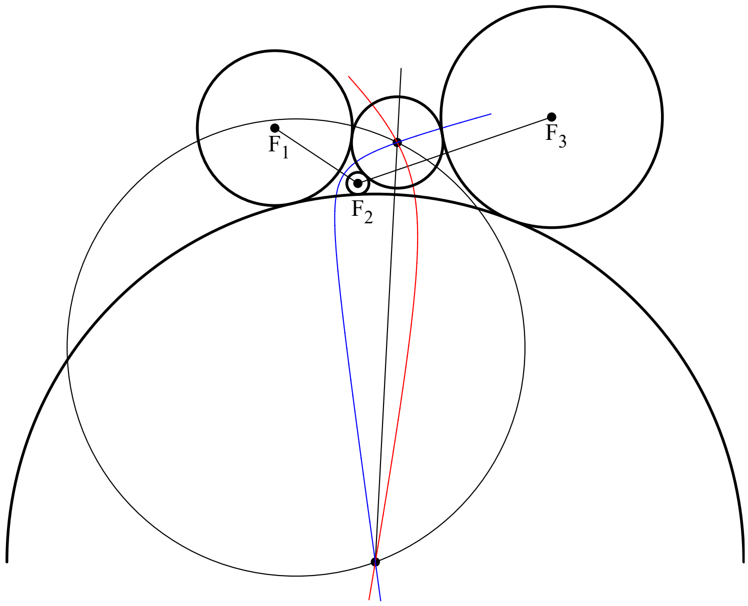
Werden sie von einem Kreis um X mit dem Radius r von außen berührt, muss

$$XF_1 = r + r_1,\; XF_2 = r + r_2,\; XF_3 = r + r_3$$

bzw.

$$XF_1 - XF_2 = r_1 - r_2,\; XF_3 - XF_2 = r_3 - r_2$$

sein. Dann ist $r = XF_1 - r_1$. Es gibt zwei Kreise, die die drei gegebenen Kreise von außen berühren:

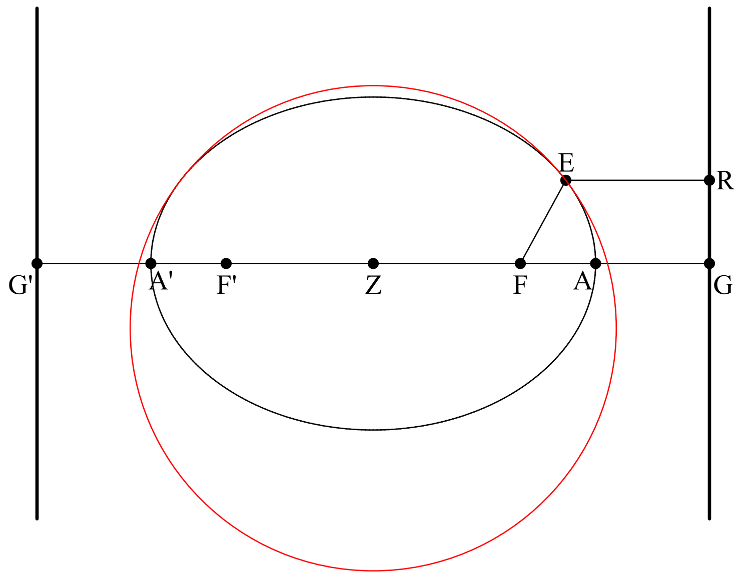


Will man Innen-Berührung, muss man jeweils die anderen Hyperbel-Äste nehmen.

Ellipsen mit gemeinsamem Brennpunkt

Anschluss-Überlegung: So, wie man zwei Hyperbeln mit gemeinsamem Brennpunkt schneiden kann, gelingt dies auch bei zwei Ellipsen mit gemeinsamem Brennpunkt:

Man habe drei (nicht kollineare) Punkte F_1, F_2, F_3. Gesucht sind die Punkte S mit $F_1S + F_2S = 2 \cdot a_{12}$, $F_3S + F_2S = 2 \cdot a_{23}$. S ist mithin Schnittpunkt zweier Ellipsen mit F_2 als gemeinsamem Brennpunkt.



Koordinatisierung einer Ellipse:

$$Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix},\ F' = \begin{pmatrix} -f \\ 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Leitgerade}: x = g = \frac{a^2}{f},\ G = \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gegeben seien F‘ und F sowie die Summe $F'E + FE = 2 \cdot a$. Damit hat man Z, A‘ und A sowie G.

Wegen $FG = \frac{a^2}{f} - f = \frac{b^2}{f}$ ist

$$G = \frac{a^2 \cdot F - b^2 \cdot Z}{f^2}.$$

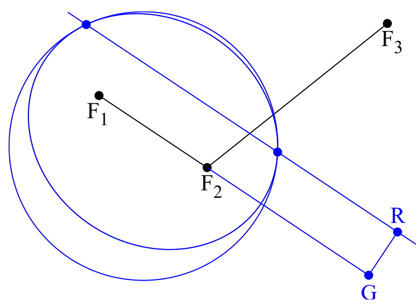
Es sei R auf der Leitgerade beliebig. Die Senkrechte zur Leitgerade durch R schneidet den Apollonius-Kreis zu R und F mit dem Teilverhältnis $\frac{RE}{EF} = \frac{GA}{AF} = \frac{\frac{a^2}{f} - a}{a - f} = \frac{a}{f} = \frac{A'A}{F'F}$ in den Ellipsen-Punkten E.

RF hat den inneren Teilungspunkt $T_i = \frac{a \cdot F + f \cdot R}{a + f}$ und den äußeren Teilungspunkt $T_a = \frac{a \cdot F - f \cdot R}{a - f}$. Der Mittelpunkt des Apollonius-Kreises ist wegen $F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} a^2 / f \\ \ldots \end{pmatrix}$ gegeben durch

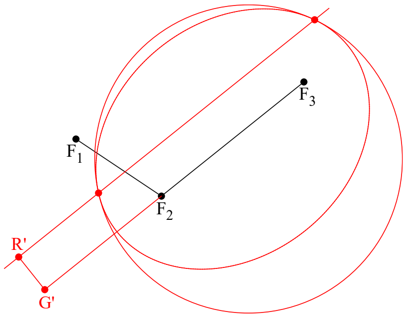
$$\frac{T_i + T_a}{2} = \frac{a^2 \cdot F - f^2 \cdot R}{a^2 - f^2} = \frac{a^2 \cdot \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} - f^2 \cdot \begin{pmatrix} a^2 / f \\ \ldots \end{pmatrix}}{a^2 - f^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \end{pmatrix}$$; er liegt also auf der Senkrechten zur Achse A’A durch Z. Das ist bei der Hyperbel auch so.

Zurück zum Ausgangsproblem:

Zur ersten Ellipse gehören die Brennpunkte F_1 und F_2, das Zentrum $Z_{12} = \frac{F_1 + F_2}{2}$ und mit $F_1F_2 = 2 \cdot f_{12}$ und $b_{12}^2 = a_{12}^2 - f_{12}^2$ den Schnittpunkt $G = \frac{a_{12}^2 \cdot F_2 - b_{12}^2 \cdot Z_{12}}{f_{12}^2}$ der Leitgeraden zu F_2 mit F_1F_2.



Zur zweiten Ellipse gehören die Brennpunkte F_2 und F_3, das Zentrum $Z_{23}=\frac{F_2+F_3}{2}$ und mit $F_2F_3=2\cdot f_{23}$ und $b_{23}^2=a_{23}^2-f_{23}^2$ der Schnittpunkt $G'=\frac{-b_{23}^2\cdot Z_{23}+a_{23}^2\cdot F_2}{f_{23}^2}$ der Leitgeraden zu F_2 mit F_2F_3.

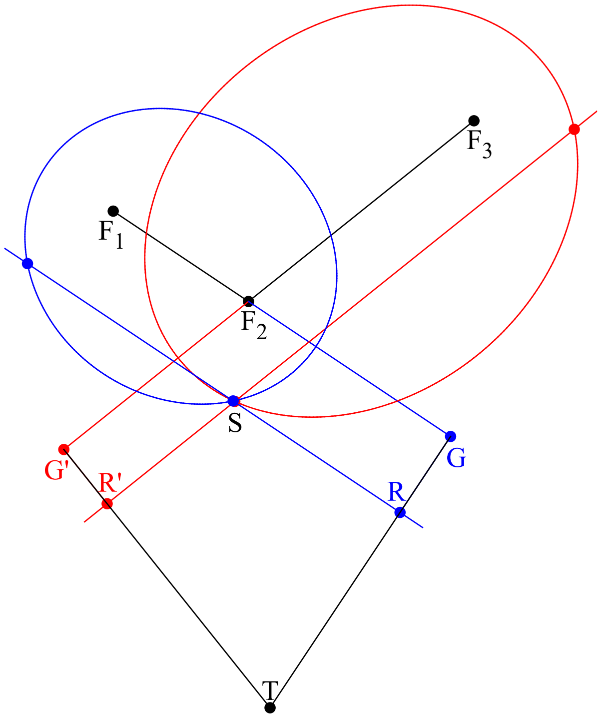


Zusammen hat man nebenstehende Konstellation.
GR und G'R' schneiden sich in T.

Die Lage der Punkte R auf GT und R' auf G'T kennt man noch nicht, auch nicht die Lage von S.

Es ist $\frac{SR}{SF_2}=\frac{2\cdot a_{12}}{F_1F_2}$ und $\frac{SR'}{SF_2}=\frac{2\cdot a_{23}}{F_2F_3}$.

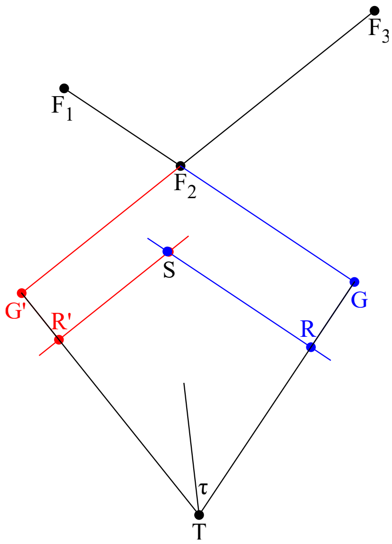
Damit ist $\frac{SR}{SR'}=:v$ bekannt, und man kann (wie bei der Hyperbel) die Gerade g durch S und T konstruieren, obwohl man S noch nicht kennt.



Damit kennt man auch den Winkel τ.

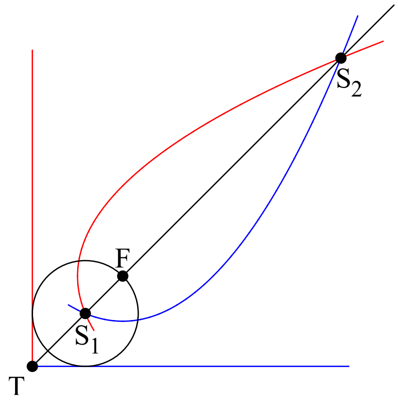
Nun ist $\frac{SR}{SF_2}=\frac{2\cdot a_{12}}{F_1F_2}$ und $\sin\tau=\frac{SR}{TS}$, also $\frac{TS}{SF_2}=\frac{2\cdot a_{12}}{\sin\tau\cdot F_1F_2}$, so dass sich S ergibt als Schnitt der Geraden g mit dem passenden Apolloniuskreis.

Damit hat man S gefunden. Wieder gibt es zwei Lösungen.

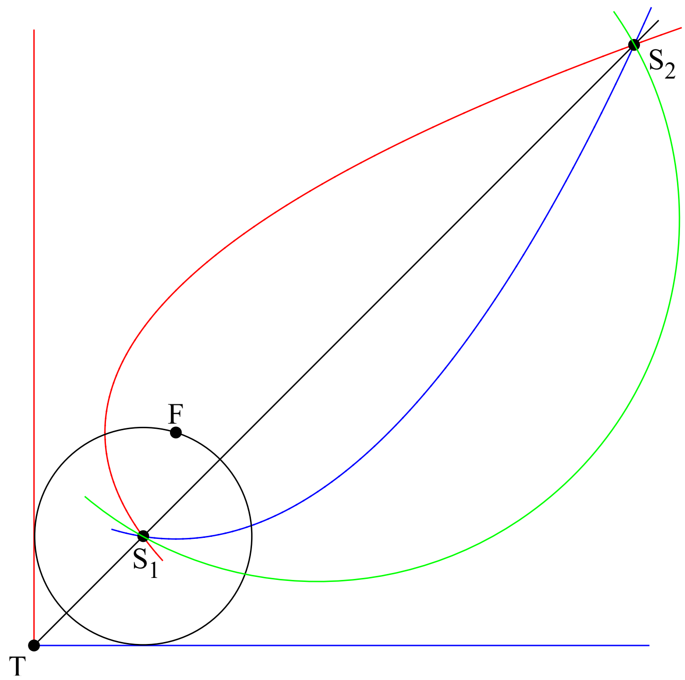


Parabeln mit gemeinsamem Brennpunkt

Hier sind mehrere Fälle zu unterscheiden:



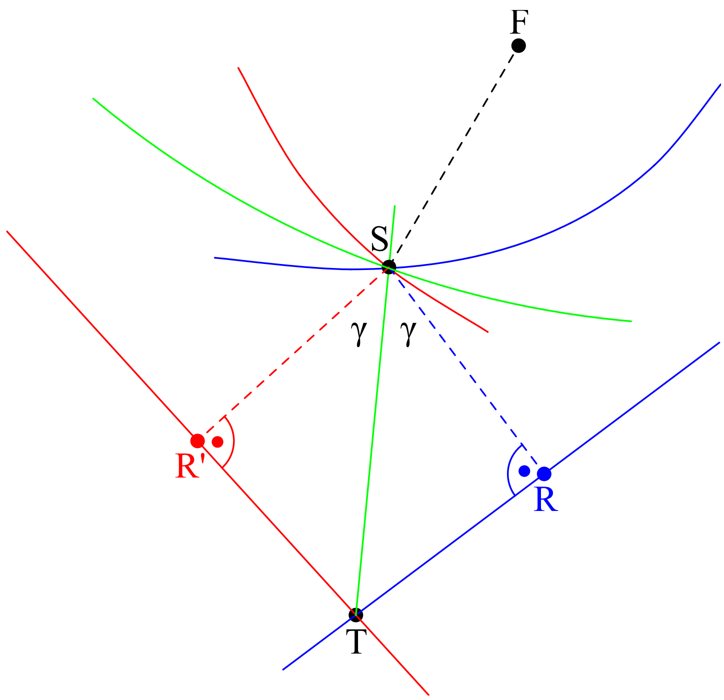
Fall A: Die Leitgeraden stehen aufeinander senkrecht, und F liege auf der Winkelhalbierenden der beiden Leitgeraden. Diese schneiden sich in T.
Der Abstand eines Schnittpunkte zur blauen Leitgerade ist so groß wie der Abstand zu F, und der ist so groß wie der Abstand zur roten Leitgerade.
Daher liegen beide Schnittpunkte auf der Winkelhalbierenden TF der beiden Leitgeraden.
Es ist $\frac{TS_1}{S_1F} = \frac{TS_2}{S_2F} = \sqrt{2}$, und damit sind die Schnittpunkte konstruierbar.



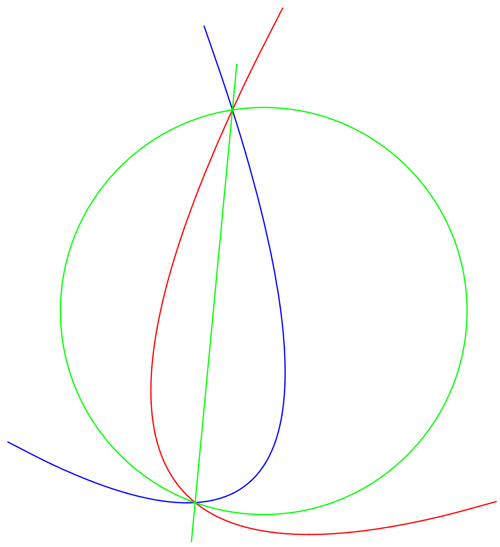
Fall B: Die Leitgeraden stehen aufeinander senkrecht, und F liege **nicht** auf der Winkelhalbierenden der beiden Leitgeraden. Diese schneiden sich in T.
Der Abstand eines Schnittpunkte zur blauen Leitgerade ist so groß wie der Abstand zu F, und der ist so groß wie der Abstand zur roten Leitgerade.
Daher liegen beide Schnittpunkte auf der Winkelhalbierenden der beiden Leitgeraden.
Es ist $\frac{TS_1}{S_1F} = \frac{TS_2}{S_2F} = \sqrt{2}$, und damit sind die Schnittpunkte konstruierbar als Schnitt des (grünen) Apollonius-Kreises zu T und F mit der Winkelhalbierenden der beiden Leitgeraden.

<u>Fall C</u>: Die Leitgeraden schneiden einander in T, stehen aber **nicht** aufeinander senkrecht
Wegen $SR = SF = SR'$ liegt S auf der (grünen) Winkelhalbierenden der beiden Leitgeraden.
Bilden die beiden Leitgeraden den Innenwinkel δ, so ist $\gamma = 90° - \frac{\delta}{2}$.

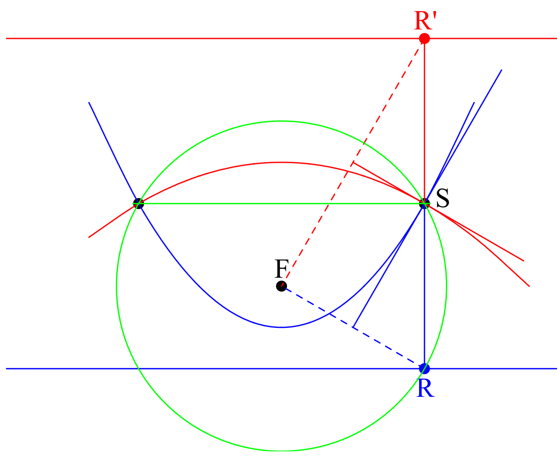
Dann ist $\cos\gamma = \frac{SR}{ST} = \frac{FS}{ST}$, und S liegt auf dem (grünen) Apollonius-Kreis zu F und T mit dem Verhältnis $\frac{FS}{ST} = \frac{\cos\gamma}{1}$.

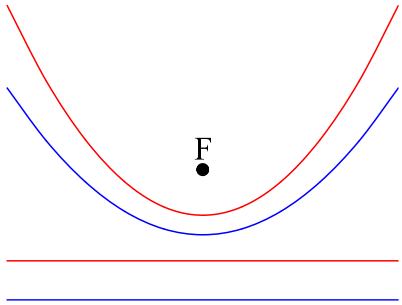


Es gibt zwei Lösungen.



<u>Fall D</u>: Die Leitgeraden sind zueinander parallel, und der Brennpunkt liegt zwischen ihnen.
Wegen $SR = SF = SR'$ liegt S auf der Mittelparallelen der beiden Leitgeraden. Außerdem liegen R, F, R‘ auf einem Kreis um S, so dass FR auf FR‘ senkrecht steht und die Tangenten in S ebenfalls orthogonal zueinander sind.
S liegt außerdem auf dem Kreis um F mit dem halben Abstand der beiden Leitgeraden.
Der zweite Schnittpunkt ist markiert.





Fall E: Die Leitgeraden sind zueinander parallel, und der Brennpunkt liegt nicht zwischen ihnen.
In diesem Fall gibt es keine Schnittpunkte.