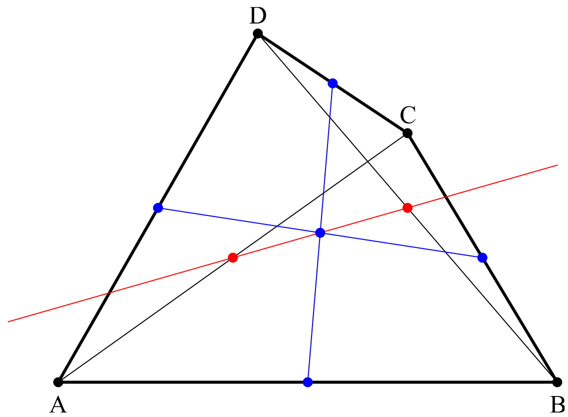
Jörg MEYER, Hameln
28. 10. 2020

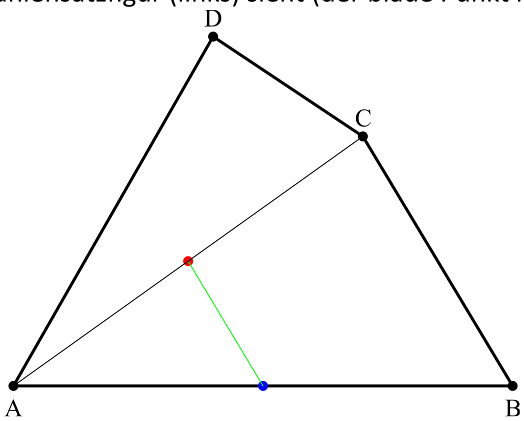
Die NEWTON-Gerade

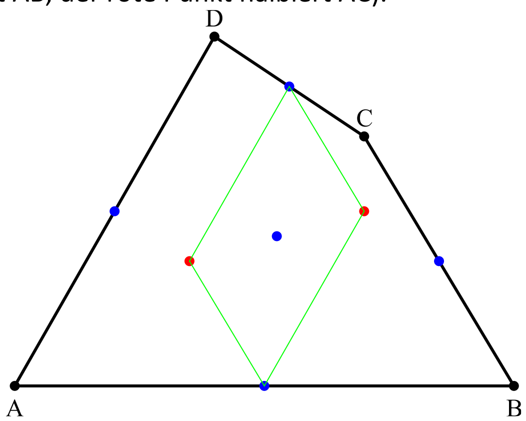
Definition und erste Eigenschaft

Ein Viereck hat zwei Diagonalen. Das Viereck sei kein Parallelogramm. Die Verbindungsgerade (rot) der beiden Mittelpunkte der Diagonalen wird nach NEWTON benannt; im Falle eines Parallelogramms entartet diese Gerade zu einem Punkt. Auf der NEWTON-Gerade liegen bemerkenswert viele weitere Punkte, so zum Beispiel der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden (blau) der Vierecksseiten, der zudem Mittelpunkt der beiden roten Punkte ist.



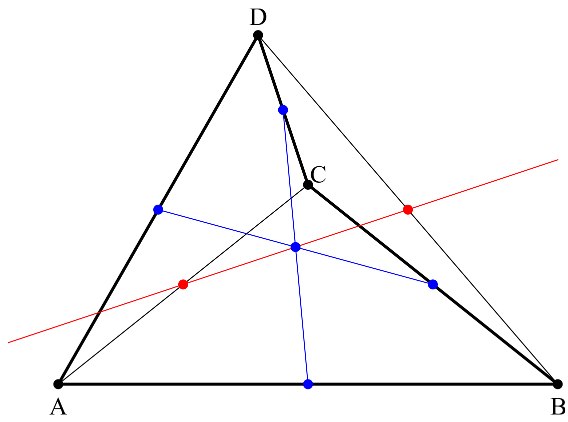
Warum ist das so? Die Figur bekommt mehr Struktur, wenn man einige Geraden unsichtbar macht und vier weitere Strecken (grün) hinzufügt, die zu den Vierecksseiten parallel sind, wie man an der Strahlensatzfigur (links) sieht (der blaue Punkt halbiert AB, der rote Punkt halbiert AC).





Die vier grünen Strecken ergeben ein Parallelogramm, dessen Diagonalen sich halbieren. Das beweist den in Rede stehenden Sachverhalt.

Ist das Viereck nicht konvex, bleibt der Sachverhalt richtig; am Beweis ändert sich nichts.



Einfacher und durchsichtiger ist ein *algebraischer* Beweis: Der Mittelpunkt von AC ist $\frac{A+C}{2}$, der von BD ist $\frac{B+D}{2}$, und der Mittelpunkt dieser beiden Mittelpunkte ist $\frac{A+B+C+D}{4}$. Dies ist auch der Mittelpunkt von $\frac{A+B}{2}$ und $\frac{C+D}{2}$. Damit ist man schon fertig.

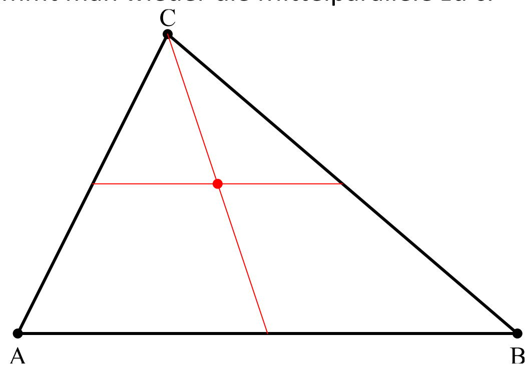
Übergang zum Dreieck

Wandert D auf C zu, so wird aus der Diagonalen AC die Seite b, aus der Diagonalen BD die Seite a, und die NEWTON-Gerade ist die Mittelparallele zu c.
Verbindet man die Mittelpunkte von AB und CD, bekommt man die Seitenhalbierende zu c.
Verbindet man die Mittelpunkte von AD und BC, bekommt man wieder die Mittelparallele zu c.
Der Schnittpunkt von Mittelparallele und Seitenhalbierender ist deren Mittelpunkt

$$\frac{A+B+2\cdot C}{4}=\frac{\frac{A+B}{2}+C}{2},$$

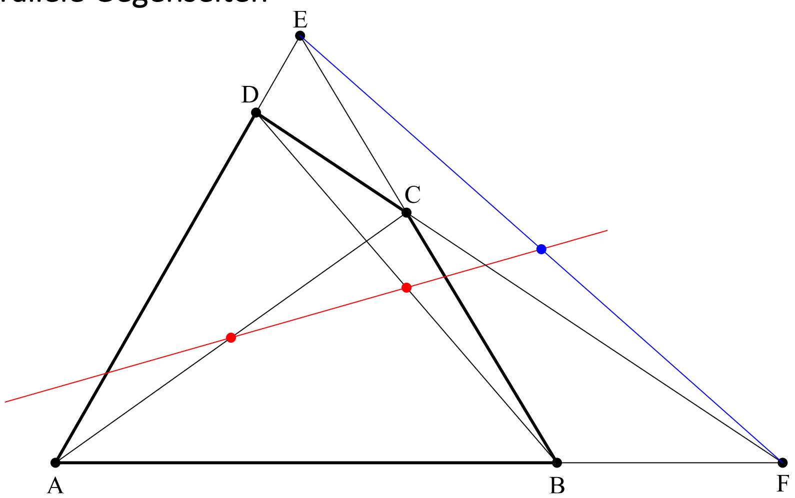
den man auch schreiben kann als

$$\frac{A+B+2\cdot C}{4}=\frac{\frac{A+C}{2}+\frac{B+C}{2}}{2}.$$



Vierecke ohne zueinander parallele Gegenseiten

Ist bei einem Viereck keine Seite zur Gegenseite parallel, so gibt es zu jedem Gegenseitenpaar einen Schnittpunkt (E und F in der Figur). Eine solche Figur heißt *vollständiges Vierseit*.
Der Mittelpunkt von EF liegt ebenfalls auf der NEWTON-Geraden.



Man kann das auch anders formulieren: Das vollständige Vierseit ABCDEF hat die (schon bekannten) Diagonalen AC und BD; dazu kommt die dritte Diagonale EF. Dann sind die drei Diagonalenmitten kollinear. Dieser Sachverhalt wurde von GAUß gefunden, und daher wird die NEWTON-Gerade für ein vollständiges Vierseit nach GAUß benannt.

Eine *algebraische* Begründung verwendet (homogene) baryzentrische Koordinaten, die auf das Dreieck ABE bezogen sind: Jeder Punkt der Ebene lässt sich als $\frac{u\cdot A+v\cdot B+w\cdot E}{u+v+w}=:(u:v:w)$. Man kann $C=\frac{0\cdot A+r\cdot B+1\cdot E}{r+1}=(0:r:1)$ und $D=(s:0:1)$ schreiben. Dann ist

$F=AB\cap DC=[0:0:1]\cap\left[\frac{1}{s}:\frac{1}{r}:-1\right]=(-s:r:0)$.

Der Mittelpunkt von AC ist $M_{AC}=\frac{1\cdot A+0\cdot B+0\cdot E}{1}+\frac{0\cdot A+r\cdot B+1\cdot E}{r'}=\frac{r'\cdot A+r\cdot B+1\cdot E}{r'}=(r':r:1)$ mit $r'=r+1$.

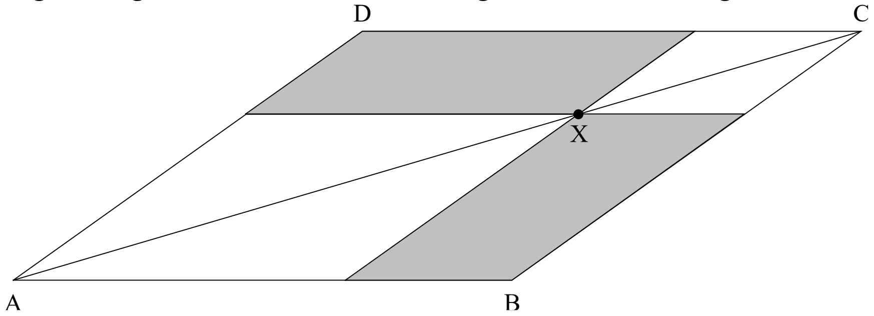
Der Mittelpunkt bon BD ist $M_{BD}=(s:s':1)$ mit $s'=s+1$.

Die Verbindungsgerade[1] ist $M_{AC}M_{BD}=[r-s':s-r':r'\cdot s'-r\cdot s]=[r-s':s-r':r+s+1]$.

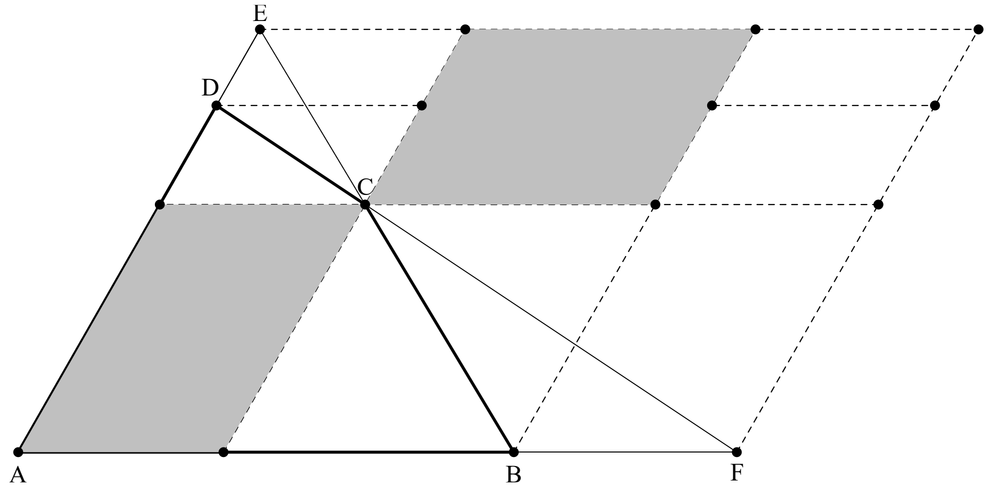
Der Mittelpunkt von EF ist $M_{EF}=(-s:r:r-s)$ und liegt auf $M_{AC}M_{BD}$.

[1] Der Punkt $(u:v:w)$ liegt genau dann auf der Geraden $[g_1:g_2:g_3]$, wenn $u\cdot g_1+v\cdot g_2+w\cdot g_3=0$ ist.

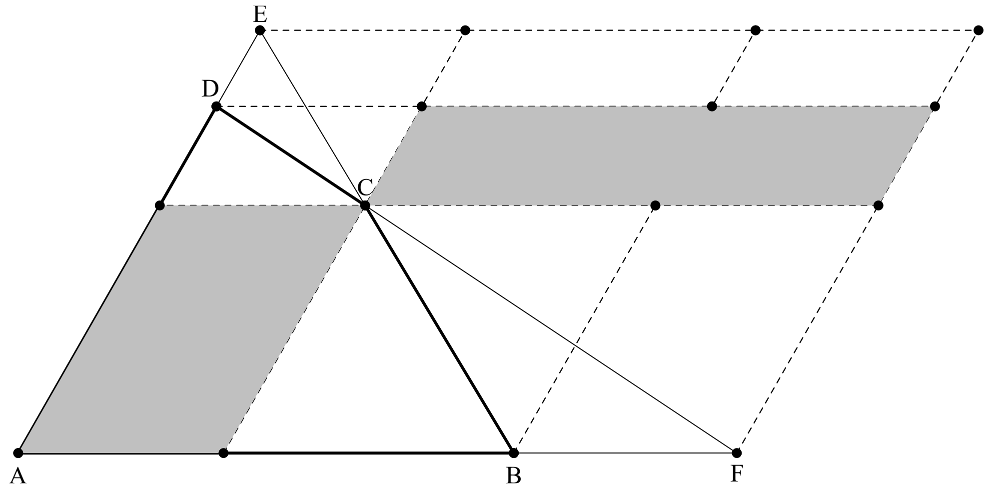
Zur *geometrischen* Begründung benötigt man eine Charakterisierung der Punkte auf Diagonalen:



Im Parallelogramm ABCD seien die Gerden durch X zu den entsprechenden Seiten parallel. Aus den Strahlensätzen folgt, dass X genau dann auf der Diagonalen AC liegt, wenn die getönten Flächen den gleichen Inhalt haben.



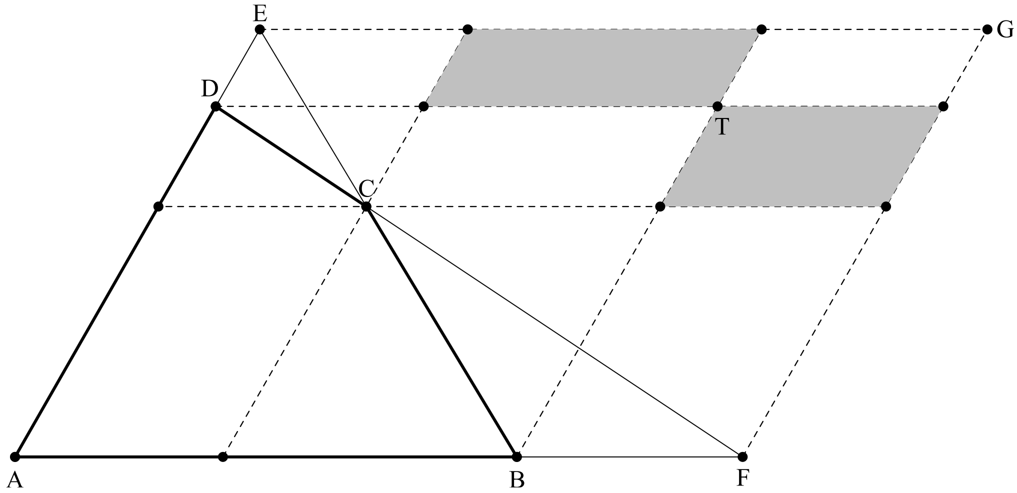
Versieht man das Viereck ABCD mit Parallellinien[2], erkennt man, dass die getönten Parallelogramme gleichen Flächeninhalts sind.



Auch hier haben die getönten Parallelogramme gleichen Flächeninhalt.

[2] R. A. Johnson, Modern Geometry: An Elementary Treatise on the Geometry of the Triangle and the Circle

Damit sind C, T und G kollinear.

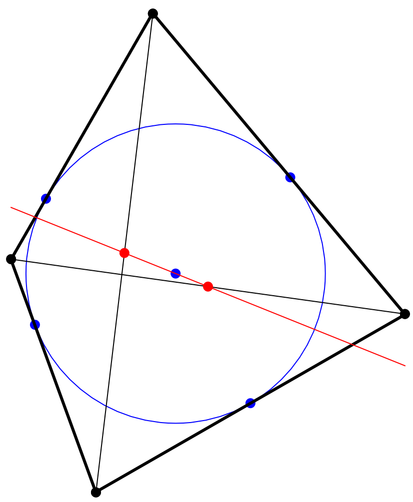


Nun ist es stets so, dass aus der Kollinearität der drei Punkte U, V, W die Kollinearität von $Z+U, Z+V, Z+W$ und damit die Kollinearität von $\frac{Z+U}{2}, \frac{Z+V}{2}, \frac{Z+W}{2}$ folgt.

Im vorliegenden Fall sind daher die Mittelpunkte $\frac{A+C}{2}, \frac{A+T}{2}$ und $\frac{A+G}{2}$ kollinear. Nun stimmt aufgrund der Parallelogramm-Eigenschaft von ABTF der Mittelpunkt $\frac{A+T}{2}$ überein mit $\frac{B+D}{2}$, und der Mittelpunkt $\frac{A+G}{2}$ stimmt überein mit $\frac{E+F}{2}$. Damit ist die Aussage bewiesen.

Tangenten-Vierecke

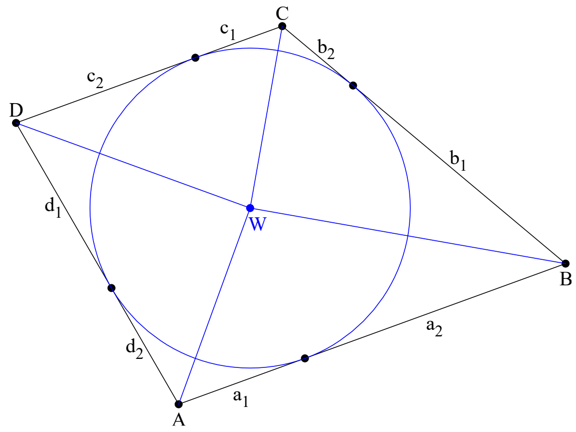
Ist das Viereck ein Tangentenviereck, so liegt der Mittelpunkt des Inkreises ebenfalls auf der NEWTON-Gerade.
Ein geometrischer Beweis verwendet den Satz von ANNE, der die Punkte auf der NEWTON-Gerade charakterisiert. Der Satz von Léon ANNE lautet: Es sei ABCD konvex und kein Parallelogramm und R ein Punkt im Inneren, der das Viereck in 4 Dreiecke aufteilt. P liegt genau dann auf der NEWTON-Gerade von ABCD, wenn die Summe der Flächeninhalte von je zwei gegenüberliegenden Dreiecken, halb so groß ist wie der Flächeninhalt von ABCD[3].



Ist ABCD ein Parallelogramm mit Inkreis, so ist ABCD ein Quadrat, dessen NEWTON-Gerade zu einem Punkt entartet, und die Aussage ist trivial.

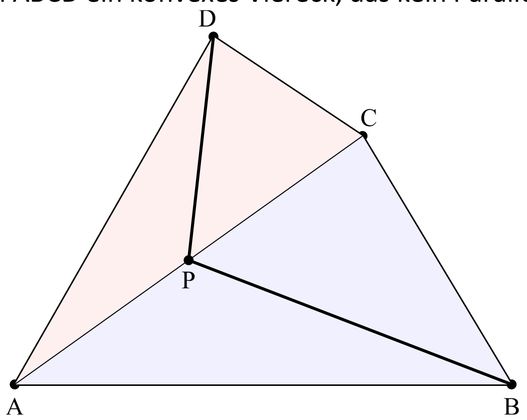
[33] Ein Beweis („surely the most beautiful and elegant“) findet sich in R. Honsberger, More Mathematical Morsels, MAA, S. 174 f. Eine unterrichtsnahe Aufbereitung des Satzes haben H. Humenberger und B. Schuppar in der Zeitschrift „Der Mathematikunterricht“ im Heft 2016/5, S. 26 ff. beschrieben. Die Verwendung des Satzes hier folgt C. Alsina / R. Nelson: Charming Proofs, MAA, S. 116 ff; dort wird auch der bei Honsberger beschriebene Beweis wieder aufgenommen. Der Beweis findet sich auch in dieser Datei, und zwar schon auf der nächsten Seite.

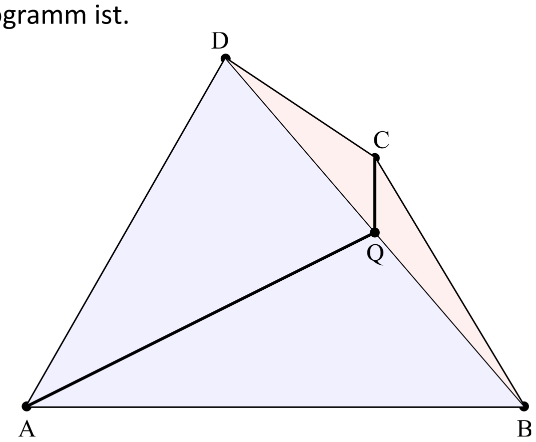
Da die Summe der Längen von gegenüber liegenden Seiten konstant ist, ist auch die Summe der Flächeninhalte von gegenüber liegenden Dreiecken konstant. Damit liegt der nkreismittelpunkt W tatsächlich auf der NEWTON-Gerade.



Zum Satz von ANNE

Es sei ABCD ein konvexes Viereck, das kein Parallelogramm ist.



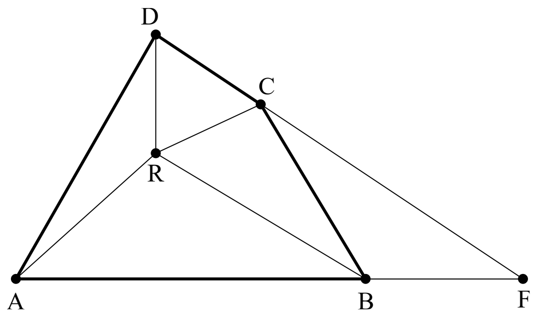


P halbiere die Diagonale AC. Dann halbiert PD das Dreieck ACD, und PB halbiert das Dreieck ABC, so dass die rötlichen Teildreiecke flächengleich sind und auch die bläulichen Dreiecke flächengleich sind. Insbesondere gilt APD + PBC = PCD + ABP: Die Summe der Flächeninhalte gegenüber liegender Dreiecke ist konstant (und zwar halb so groß wie der Flächeninhalt von ABCD).
Eine analoge Aussage erhält man, wenn Q die Diagonale BD halbiert.

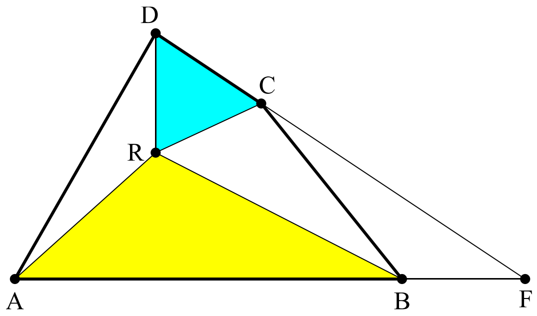
Nun sei R so, dass die Summe der Flächeninhalte gegenüber liegender Dreiecke halb so groß ist wie der Flächeninhalt Δ von ABCD, also

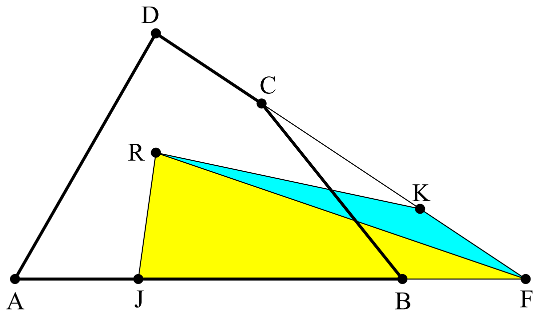
$\mathrm{RAB} + \mathrm{RCD} = \frac{\Delta}{2}$ (dann ist auch $\mathrm{RDA} + \mathrm{RBC} = \frac{\Delta}{2}$).

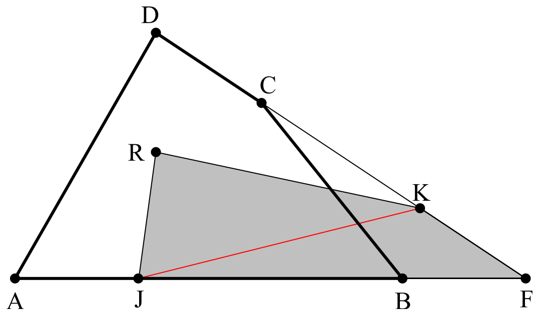
Seien etwa AB und CD nicht zueinander parallel.
Dann existiert der Schnittpunkt F.



Die Idee ist, die Dreiecke ABR und RCD so zu scheren, dass F jeweils ein Dreieckspunkt wird.
Ist AB = JF, so haben die gelben Dreiecke den gleichen Flächeninhalt.
Ist DC = KF, so haben die cyanfarbenen Dreiecke den gleichen Flächeninhalt.







Damit ist der Flächeninhalt des grauen Vierecks JFKR halb so groß wie der Flächeninhalt von ABCD. Am Flächeninhalt von JFKR ändert sich aber genau dann nichts, wenn sich R auf einer Parallelen zu JK bewegt. Da die Diagonalenmittelpunkte P und Qdie Eigenschaft haben, dass

$\mathrm{PAB}+\mathrm{PCD}=\mathrm{QAB}+\mathrm{QCD}=\frac{\Delta}{2}$ gilt, muss R auf der Geraden durch P und Qliegen.

Somit gilt: $\mathrm{RAB}+\mathrm{RCD}=\frac{\Delta}{2}$ genau dann, wenn R auf der Geraden PQ liegt.

Sehnen-Vierecke

Bei einem Viereck mit Umkreis (grün) liegt dessen Mittelpunkt i.a. nicht mehr auf der NEWTON-Gerade. Das ändert sich auch nicht, wenn man zum Sehnen-Tangenten-Viereck übergeht, also zu einem Viereck, das einen Inkreis (blau) und einen Umkreis (grün) hat.