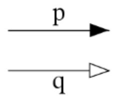
Jörg MEYER, Hameln

28. 10. 2021

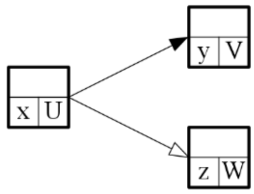
Beobachtungen beim Werfen einer gezinkten Münze

Es handelt sich um eine gezinkte Münze, die mit Wahrscheinlichkeit p auf die Seite „a“ fällt und mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ auf die Seite „b“ fällt. Es ist immer nur eine einzige Münze im Spiel.

Die Übergangs-Wahrscheinlichkeit p wird mit einem Pfeil mit voller Spitze symbolisiert, die Übergangs Wahrscheinlichkeit q mit einem Pfeil mit leerer Spitze.



Sind x, y und z die Wahrscheinlichkeiten, von der jeweiligen Stelle aus zum Ziel zu gelangen, so ist[1] $\boxed{x = p \cdot y + q \cdot z}$.
Es handelt sich also nicht um die üblichen Baumdiagramme.
Sind U, V und W die durchschnittlichen Wurfanzahlen, um von der jeweiligen Stelle aus zum Ziel zu gelangen, so ist $\boxed{U = 1 + p \cdot V + q \cdot W}$.

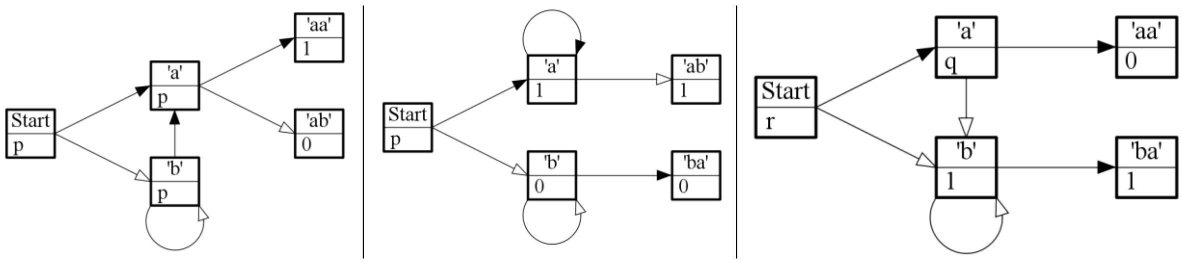


Aaron, Bastian und Abel beobachten die Münzwürfe.

Aaron gewinnt, wenn die Sequenz „aa“ als erste fällt, Bastian, wenn „ba“ erst kommt, und Abel, wenn „ab“ als erste fällt. Wenn eine dieser Sequenzen fällt, ist der Wettstreit beendet.

Allerdings treten die drei nicht gleichzeitig gegeneinander an, sondern paarweise.

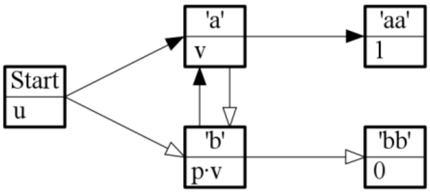
Aaron gewinnt mit Wahrscheinlichkeit p gegen Abel, Abel gewinnt mit Wahrscheinlichkeit p gegen Bastian, und Bastian gewinnt mit Wahrscheinlichkeit $r = p \cdot q + q \cdot 1 = 1 - p^2$ gegen Aaron (in den Kästen steht rechts unten die Wahrscheinlichkeit, von dieser Stelle aus zu gewinnen, und zwar links aus der Sicht von Aaron, in der Mitte aus der Sicht von Abel und rechts aus der Sicht von Bastian:



Können die Wahrscheinlichkeiten p und r beide größer sein als 1/2, so dass man eine intransitive Konstellation hat? Wegen $r > \frac{1}{2} \Leftrightarrow p^2 < \frac{1}{2}$ ist das der Fall für $\boxed{\frac{1}{2} < p < \frac{\sqrt{2}}{2}}$, also etwa für $p = \frac{2}{3}$.

[1] Die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten und später der Wartezeiten orientiert sich an Engel, Arthur (1976): Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Band 2. Stuttgart: Klett, S. 22 ff. . In Henze, Norbert (2001): Muster in Bernoulli-Ketten. In: *Stochastik in der Schule* **21** (2), S. 2 - 10 werden alternative Methoden dargestellt und kommentiert.

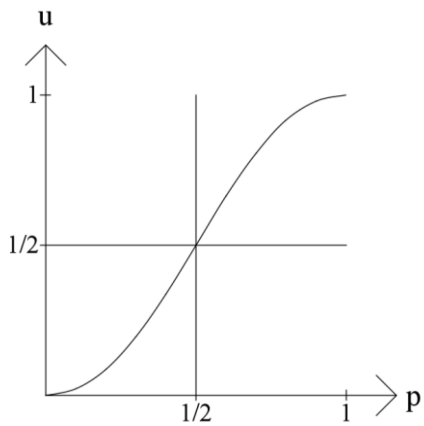
Schlägt Aaron auch meistens den neu hinzugekommenen Bernd-Bodo, der sich für „bb“ entschieden hatte?



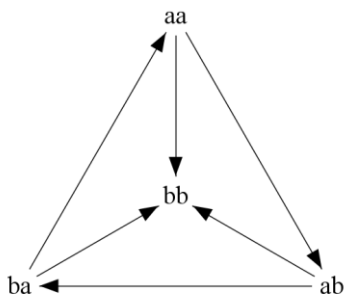
Wegen $v = p + q \cdot p \cdot v$ ist $v = \dfrac{p}{1 - p \cdot q}$ und daher

$$u = p \cdot v + q \cdot p \cdot v = (1+q) \cdot \frac{p^2}{1 - p \cdot q}.$$

Der Graph zeigt, dass $u > \frac{1}{2}$ ist für $p > \frac{1}{2}$, was wegen $u - p = \dfrac{2 \cdot p \cdot q}{p^2 - p + 1} \cdot \left(p - \dfrac{1}{2}\right)$ auch zu erwarten gewesen war (der Nenner ist stets positiv).



Das Diagramm rechts fasst das Bisherige zusammen, wenn man jetzt den Pfeil jeweils als „schlägt meistens“ interpretiert.



Auch die folgende Tabelle fasst das Bisherige zusammen; die noch gefehlt habenden Zellen ergeben sich durch Symmetriebetrachtungen. Lesehilfe: Ein Element der linken Spalte schlägt ein Element der oberen Zeile mit der angegebenen Wahrscheinlichkeit.

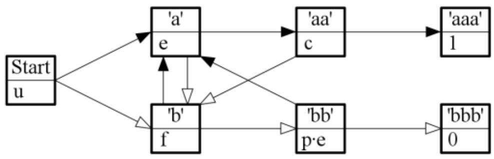
→	→ „aa“	→ „ab“	→ „ba“	→ „bb“
„aa“ →	-	p	p^2	
„ab“ →	q	-	p	$1-q^2$
„ba“ →	$1-p^2$	q	-	p
„bb“ →		q^2	q	-

Ist $\frac{1}{2} < p < 1$, so gewinnt „a“ gegen „b“ mit Wahrscheinlichkeit p und „aa“ gegen „bb“ mit der größeren Wahrscheinlichkeit $u = \dfrac{p^2 \cdot (1+q)}{1 - p \cdot q}$. Wie steht es mit „aaa“ gegen „bbb“?

Wegen

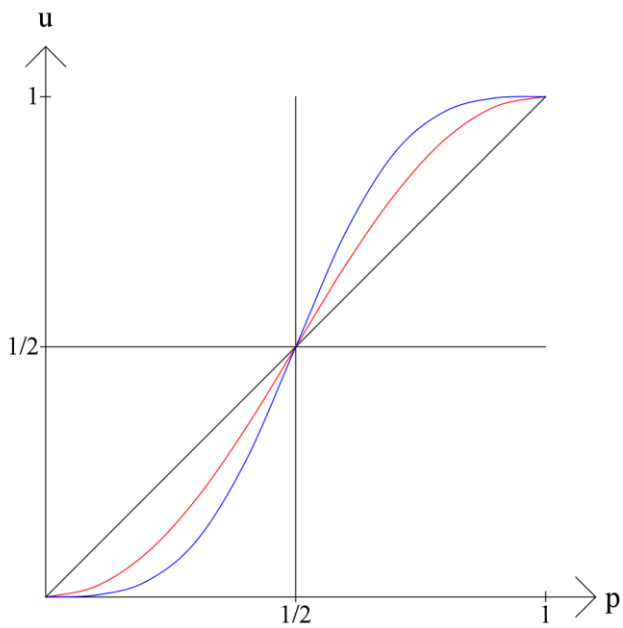
$c=p+q\cdot f,\; e=p\cdot c+q\cdot f,\; f=p\cdot e+q\cdot p\cdot e=p\cdot(1+q)\cdot e$

ist $u=p\cdot c+q\cdot f=\dfrac{p^3\cdot\left(1+q+q^2\right)}{1-p\cdot q\cdot(p+1)\cdot(q+1)}$.



Die schwarze Gerade gehört zu „a“ gegen „b“,
die rote Kurve zu „aa“ gegen „bb“,
die blaue Kurve zu „aaa“ gegen „bbb“.

Für $p>\frac{1}{2}$ gilt erwartungsgemäß: „aaa“ gewinnt gegen „bbb“ mit höherer Wahrscheinlichkeit als „aa“ gegen „bb“.



Sehen wir uns noch einmal den Wettstreit zwischen Aaron und Bastian an, den Bastian mit der Wahrscheinlichkeit r gewinnt.

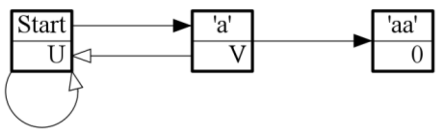
Die durchschnittliche Anzahl U_a von Würfen, bis erstmalig „a“ fällt, beträgt $\boxed{U_a=\frac{1}{p}}$ wegen

$U_a=p\cdot 1+q\cdot\left(1+U_a\right)$.

Es sei $U=U_{aa}$ die durchschnittliche Anzahl von Würfen, bis erstmalig „aa“ fällt. In den Kästen steht unten rechts die durchschnittliche Anzahl der Züge bis zum jeweiligen Ziel.

Es ist $V=1+p\cdot 0+q\cdot U;\; U=1+p\cdot V+q\cdot U$ mit der Lösung

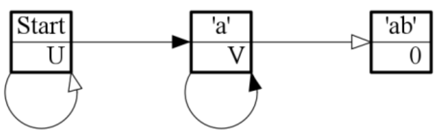
$\boxed{U_{aa}=\dfrac{p+1}{p^2}=U_a+\dfrac{1}{p^2}}$.



Für $U=U_{ab}$ als durchschnittliche Anzahl der Würfe, bis erstmalig ein „ab“ erscheint, ist

$V=1+q\cdot 0+p\cdot V;\; U=1+p\cdot V+q\cdot U$ mit dem Ergebnis

$\boxed{U_{ab}=\dfrac{1}{p\cdot q}=U_a+U_b=U_{ba}}$.



Wäre Aaron allein, so müsste er im Schnitt $U_{aa} = \frac{p+1}{p^2}$ Züge auf „aa“ warten, und wäre Bastian allein, so müsste er im Schnitt $U_{ba} = \frac{1}{p \cdot q}$ Züge auf „ba“ warten. Kann es sein, dass zwar Bastian mit Wahrscheinlichkeit größer als 1/2 gewinnt, dass also $p^2 < \frac{1}{2}$ ist, dass aber Bastian länger auf seine Sequenz warten muss als Aaron, dass also $\frac{1}{p \cdot q} > \frac{1+p}{p^2}$ bzw. $p^2 + p - 1 > 0$ gilt? Das ist tatsächlich der Fall für $\boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{2} < p < \frac{\sqrt{2}}{2}}$ bzw. für 0,62<p<0,71, also etwa für $p = \frac{2}{3}$.

Dieses Erwartungswert-Paradoxon wird von Martin Gardner so kommentiert:

„An event that is less frequent in the long run is likely to happen before a more frequent event.”[2]

Die durchschnittliche Anzahl der Züge für Bastian und für Abel ist für jeden Wert von p gleich. Aber Abel gewinnt mit Wahrscheinlichkeit p gegen Bastian. Man kann also aus dem Erwartungswert der Zuganzahl nicht auf die Gewinn-Wahrscheinlichkeit schließen, was eigentlich auch gar nicht zu erarten ist, denn der Erwartungswert der Zug-Anzahl bezieht sich immer nur auf eine einzige Person, wohingegen die Gewinn-Wahrscheinlichkeit auch die Zielsequenz des Gegners berücksichtigt.

Und noch eine Lehre kann man aus dem Obigen ziehen: Immer, wenn eine Münze zum Erwartungswert-Paradoxon führt, führt sie auch zur Intransitivität.

[2] Gardner, Martin: Nontransitive Paradoxes. In: Time Travel, 1988 New York: Freeman, S. 64. Dort wird auch berichtet, dass die Intransitivität und das Erwartungswert-Paradoxon bei drei- und viergliedrigen Sequenzen fairer Münzen von den Herren Penney und Wolk entdeckt wurde. Der vorliegende Beitrag zeigt, dass diese beiden Phänomene schon bei zweigliedrigen Sequenzen gezinkter Münzen auftreten können.