

Kurven und Flächen in der Vektorgeometrie¹

von

Jörg Meyer, Hameln

Zusammenfassung: Immer noch sind Geraden, Ebenen und Kreise/Kugeln die hauptsächlichen Inhalte der Vektorgeometrie. Zur Untersuchung dieser trivialen Objekte werden weit-ausholende Methoden entwickelt. Die Banalität der Objekte verhindert aber, dass sich die Kraft der Methoden angemessen entfalten kann. Es wird gezeigt, dass ganz dicht neben dem Standardcurriculum interessante Objekte liegen, die mit einfachen Methoden untersucht werden können. Hier lassen sich Computer-Algebra-Systeme und Dynamische Geometrie-Software sinnvoll einsetzen. Zum Teil spielen die zu behandelnden Gegenstände auch in Anwendungen eine erhebliche Rolle.

Summary: The German curriculum of vector geometry still consists mainly in the study of lines, planes, circle, and spheres. A lot of methods are developed in order to explore these trivial objects, but the methods cannot show their power because the objects are so trivial. The article shows that there are many simple, but not trivial, objects which are worth to be explored. Computer algebra and interactive geometry systems may be helpful. Some of the objects are used in applied mathematics.

0. Einleitung

Warum unterrichtet man eigentlich Vektorgeometrie? Nur, um Geraden mit Ebenen zu schneiden und ggf. Kugeln analytisch beschreiben zu können?

Für diese dürre Zielsetzung ist die Vektorgeometrie nicht geschaffen worden! Statt dessen lässt sie sich auf der Schule als bequeme Sprache verwenden, um adäquat Kurven oder Flächen beschreiben zu können. Im Mittelpunkt stehen dann weniger die Methoden der Vektorgeometrie (die unterschiedlichen Darstellungen von Geraden oder die verschiedenen Produkte), sondern interessante Objekte.

Auch Schupp (2000a) betont: „Wir benötigen dringend eine geometrisch relevantere Materialbasis, an der polydeskriptiv unterstützte Überlegungen ansetzen können. Und wir sollten klare Prioritäten schaffen: Beschreibungen sind zur Objektexploration da und nicht Objekte als Futter für Beschreibungen.“ (S. 56)

Schon Führer (1979) sieht „im Mangel an nichttrivialen Körpern das Hauptübel des gegenwärtigen Unterrichts in Vektorgeometrie“ und lässt statt dessen die Schü-

¹ Der Aufsatz erschien in *mathematica didactica* **24** (1), S. 51 – 70 (2001). Er wurde hochgeladen mit freundlicher Genehmigung des Verlegers.

ler „am konkreten Objekt erfahren, wie unzulänglich die Anschauung ist und wie sehr man ihr durch analytische Erkenntnisse auf die Sprünge helfen kann.“

Die Untersuchung von Objekten gestaltet sich besonders motivierend, wenn diese von den Lernenden möglichst selber erzeugt wurden. So schreibt Schupp (2000a): „Zweifellos werden geometrische Sachverhalte lebendiger, interessanter, einsichtiger und schöner, wenn Entstehungs- und Veränderungsprozesse (Genesen und Metamorphosen) mitgesehen und mitreflektiert werden.“ (S. 60)

Der Samen für das Folgende kann schon mit den Inhalten der Klasse 9 gelegt werden:

1. Die Höhenschnittpunktspare

Was passiert mit dem Höhenschnittpunkt eines Dreiecks, wenn die Dreiecksspitze parallel zur Grundseite wandert?

Die Ortskurve sieht aus wie eine Parabel, und dass es tatsächlich eine ist, lässt sich leicht nachrechnen: Dazu wird das Ausgangsdreieck (mit der Höhe h) koordinatisiert zu $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} t \\ h \end{pmatrix}$. In allen folgenden Ausführungen werden

Punkte mit den zugehörigen Ortsvektoren identifiziert. (Wer mag, kann sich in allen Vektorgleichungen über den Symbolen der Punkte kleine Pfeile denken.)

Die Höhe durch C ist gegeben durch $x = t$, und die Höhe durch A hat die Gleichung

$$\vec{x} \cdot (\vec{C} - \vec{B}) = \vec{A} \cdot (\vec{C} - \vec{B})$$

bzw.

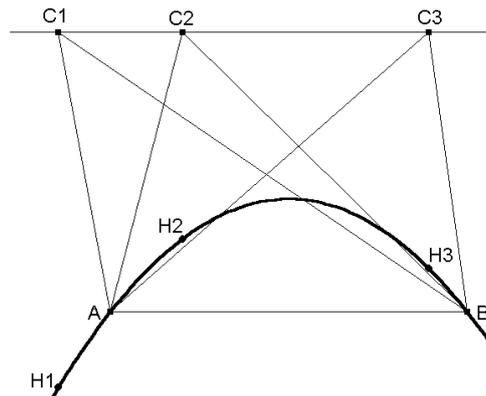
$$(\vec{x} - \vec{A}) \cdot (\vec{C} - \vec{B}) = 0$$

oder nach Einsetzen der Koordinaten

$$x \cdot (t - 1) + y \cdot h = 1 - t.$$

Der Schnitt beider Gleichungen liefert

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ (1 - t^2)/h \end{pmatrix}.$$



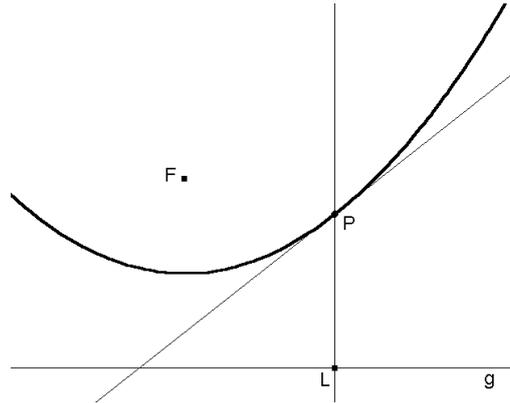
Der so ermittelte Punkt X ist der Höhenschnittpunkt H . Aus der Form von H ist klar, dass H auf einer nach unten geöffneten Parabel liegt, und man kann ablesen, wie die Höhe h die Öffnung beeinflusst.

Verwandte Aufgaben finden sich in Meyer (1997a).

2. Die Parabel als Ortskurve

Die Eigenschaft der Parabel, Graph einer quadratischen Funktion zu sein, sollte angereichert werden durch substantziellere geometrische Eigenschaften wie die folgende:

Gegeben seien ein Punkt F und eine Gerade g (nicht durch F). Alle Punkte P , die zu F und zu g gleich weit entfernt sind, liegen auf einer Parabel. Wie konstruiert man solche Punkte?



Nach einer naheliegenden Koordinatisierung ist $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $g: y = 0$.

Wandert $L = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ auf g , so gehört zu L ein Parabelpunkt P , der sich als Schnittpunkt der Senkrechten zu g durch L (nämlich $x = t$) mit der Mittelsenkrechten zu FL (nämlich $X \cdot (L - F) = \frac{L + F}{2} \cdot (L - F)$ bzw. $x \cdot t - y = \frac{t^2 - 1}{2}$) ergibt; es ist dann

$$P = \begin{pmatrix} t \\ (t^2 + 1)/2 \end{pmatrix}. \text{ Die Parabeleigenschaft ist offensichtlich.}$$

Eine variantenreiche Aufbereitung für die Klasse 9 findet sich in Cukrowicz/Zimmermann (2001, Kap. 5). Eine Aufbereitung für die Sekundarstufe II findet sich in Meyer (1995a; 1996).

3. Ellipse und Hyperbel

Von der Parabel als Ortskurve ist es nur noch ein kleiner Schritt zu allgemeinen Kegelschnitten: Biegt man die Gerade g zu einem Kreis, so kann man das auf zwei Arten machen: Entweder liegt F innerhalb des so entstehenden Kreises, oder F liegt außerhalb. In jedem Fall wird man alle Punkte P suchen, die zu F und dem Kreis gleich weit entfernt liegen.

Was soll überhaupt die Entfernung eines Punktes zu einem Kreis sein? In Analogie zum Parabelfall und nach Betrachtung der Zeichnung wird man sagen:

Wie üblich ist der Abstand zwischen Punkt und Kreis als kürzeste Entfernung $d(P, K)$ für Punkte K auf dem Kreis definiert.

Nach einer naheliegenden Koordinatisierung ist $K = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ ein allgemeiner Punkt

des Kreises mit dem Mittelpunkt

$$Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sowie } F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wandert K auf dem Kreis, so gehört zu K ein Punkt P, der sich als Schnittpunkt von ZK (nämlich $X = Z + \lambda \cdot (K - Z) = \lambda \cdot K$) mit der Mittelsenkrechten zu FK (nämlich

$$X \cdot (K - F) = \frac{K + F}{2} \cdot (K - F)) \text{ ergibt;}$$

$$\text{es ist dann } \lambda = \frac{1}{2} \cdot \frac{K^2 - F^2}{K^2 - K \cdot F} \text{ und}$$

folglich

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{K^2 - F^2}{K^2 - K \cdot F} \cdot K = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - f^2}{1 - f \cdot \cos t} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Hieraus ist weder die Ellipsen- noch die Hyperbeleigenschaft offensichtlich.

Testet man die entstehende Kurve für $f = \frac{3}{4}$ und für $f = \frac{5}{4}$ mit Derive, so be-

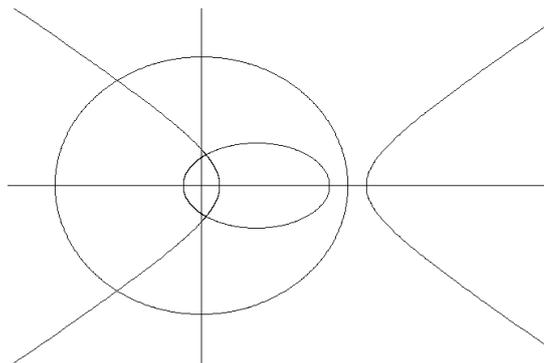
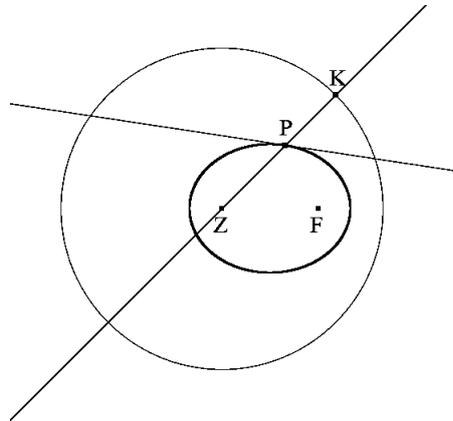
kommt man nebenstehendes Bild. Dies war dem allgemeinen Kurvenpunkt kaum anzusehen gewesen.

Man bekommt die Kurvengleichung durch Elimination von t (mit Hilfe eines CAS); das Ergebnis ist

$$4 \cdot \left(x - \frac{f}{2} \right)^2 + \frac{4}{1 - f^2} \cdot y^2 = 1.$$

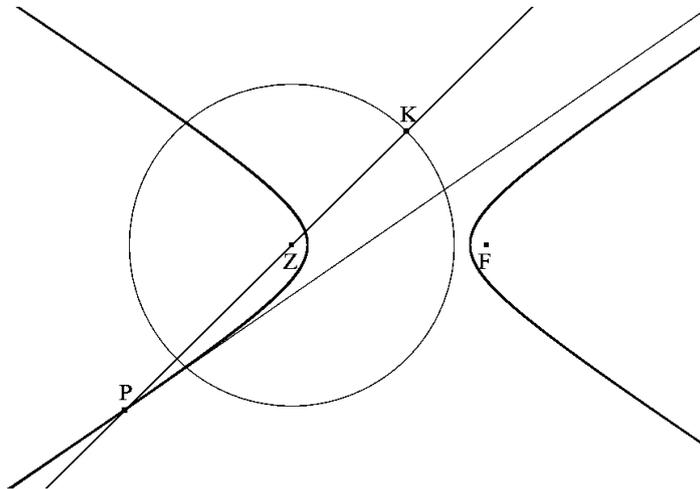
Aus dieser Gleichung ist schon mehr zu erkennen.

Man bekommt das Symmetrieverhalten der Ellipse auch so:



Wegen $d(P, K) = 1 - d(P, Z)$ lässt sich die die Ellipse definierende Gleichung $d(P, F) = d(P, K)$ umschreiben zu $d(P, F) + d(P, Z) = r$. Z und F sind also gleichberechtigt.

Wie ist es, wenn F außerhalb des Kreises liegt? Hier ist ein Blick auf die Entstehung von P mit dynamischer Geometrie-Software hilfreich (man ziehe einfach F aus dem Kreis heraus):



Für den linken Hyperbelast ist jetzt der Abstand zwischen Punkt und Kreis nicht mehr die kürzeste, sondern die weiteste Entfernung $d(P, K)$ für Punkte K auf dem Kreis definiert. Sinnvolle Definitionen sind offensichtlich nicht willkürlich!

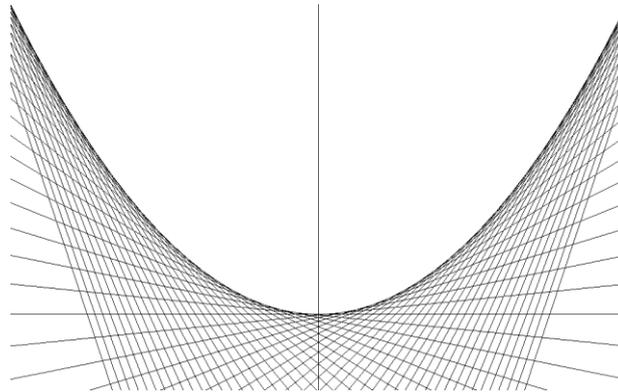
Für weitere Eigenschaften von Ellipsen und Hyperbeln siehe Meyer (1995a; 1996). Insbesondere lassen sich die Kegelschnitte mit dynamischer Geometrie-Software weitgehend nach den Prinzipien des entdeckenden Unterrichts behandeln: Die Sätze sind konstruktiv gut zugänglich, die Konstruktionen können interaktiv verändert werden, und die einfache Erzeugung von Ortslinien liefert die Möglichkeit, geometrische Fragestellungen gezielt zu untersuchen. Es empfehlen sich Arbeitsblätter, die bei Parabeln noch relativ eng formuliert sein dürfen, um erst einmal eine Grundlage zu schaffen. Bei den Ellipsen und Hyperbeln sollen die Schüler dann feststellen, wie die Parabeleigenschaften zu übertragen sind und welche Veränderungen vorzunehmen sind. Dies kann in Form recht offener Arbeitsaufträge geschehen. Dass die Ergebnisse dieser Aktivitäten vom Umfang und auch vom Inhalt her nicht von vorneherein feststehen, gehört zum Wesen entdeckenden Lernens!

Zur Didaktik der Kegelschnitte siehe Schupp (2000b), zu anderen Zugängen Tietze/Klika/Wolpers (2000, S. 224 ff).

Man wird vielleicht (zu Recht) vermissen, dass die Kegelschnitte als Schnitte eines Kegels gar keine Rolle gespielt haben. Nun sind die methodischen Möglichkeiten von der (zweidimensionalen) dynamischen Geometrie-Software so überwältigend, dass ich mehr Sinn darin gesehen habe, Kegelschnitte (wie oben) als Ortskurven einzuführen, zumal die Dandelin'schen Kugeln ohnehin nach der Motivierung der die Kegelschnitte definierenden Eigenschaften schnell wieder vergessen werden.

4. Parabeln als Hüllkurven

Es sei wieder $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $g : y = 0$. Der Punkt $L = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ wandere auf g . Errichtet man in L eine Senkrechte zu FL , so hüllen alle diese Senkrechten eine Parabel ein.



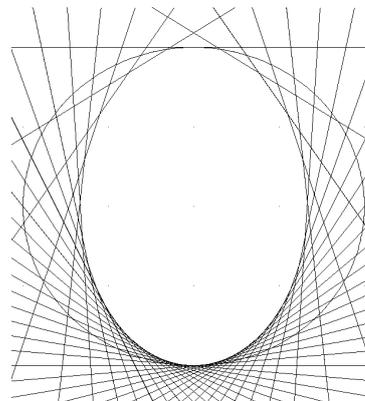
Eine typische Senkrechte hat die Gleichung $y = t \cdot (x - t)$; der Derive-Code ist der folgende:

```
g(t) := y = t · (x - t)  
VECTOR(g(t), t, -3, 3, 0.1)
```

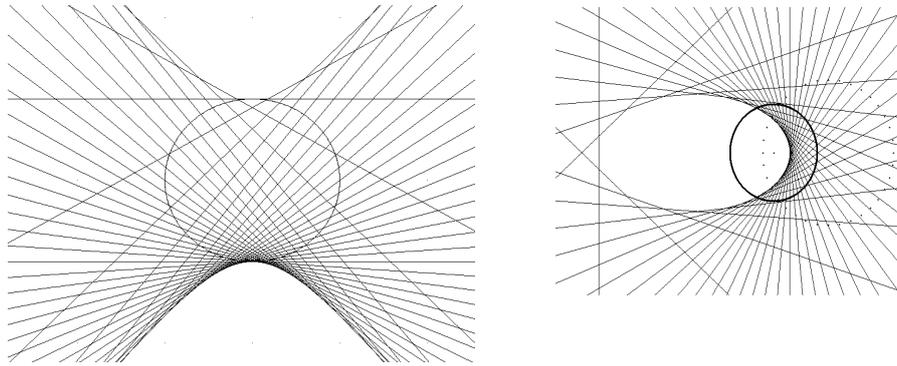
Vor dem Zeichnen muss noch vereinfacht werden.

Wie man beweisen kann, dass es sich tatsächlich um eine Parabel handelt, findet sich in Meyer (1997b). Dort stehen auch die Verallgemeinerungen auf Ellipse und Hyperbel.

Hat man bei Kegelschnitten etwas von der Polarentheorie unterrichtet (was mit dyna-



mischer Geometrie-Software sehr lohnend ist), bieten sich ästhetisch sehr ansprechende Bilder von Polarenhüllkurven an; man vergleiche Meyer (1996).



5. Aus Kegelschnitten werden neue Kurven erzeugt

Welche Kurve erhält man, wenn man eine Gerade g an der Normalparabel spiegelt?

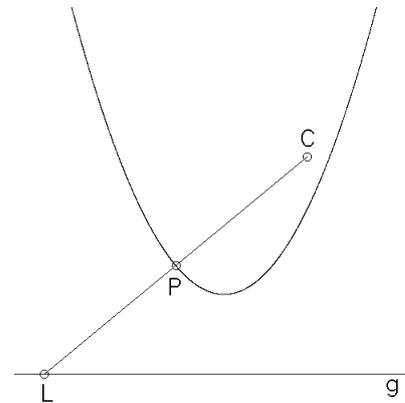
Was soll das überhaupt heißen? Man wird sich vielleicht darauf einigen, die Gerade punktwise an der Normalparabel zu spiegeln. Nehmen wir dazu eine Gerade, die senkrecht zur Parabelachse verläuft. Dann hat die Gerade wenigstens eine einfache Gleichung, etwa $y = a$. (Es ist ein wichtiges heuristisches Prinzip, mit einfachen Fällen zu beginnen.)

Naiv wird man so vorgehen: Zum Punkt L sucht man denjenigen Parabelpunkt P , der zu L den geringsten Abstand hat, und spiegelt anschließend L an P . Dies führt allerdings auf eine Gleichung 3. Grades (da es von manchen Punkten der Ebene aus drei Normalen auf die Parabel gibt) mit einem Parameter, die Derive nicht lösen kann. Was tun?

Einfacher ist der Weg, nicht von L , sondern von P auszugehen und zu P das zugehörige L zu suchen.

Schülerinnen und Schüler sollten erfahren, dass der naive Weg Fallstricke haben kann, man aber durch Umkehr der Blickrichtung trotzdem zu einer einfachen Lösung kommen kann.

Von jedem Punkt $P = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ der Normalpa-



abel wird die Normale mit dem all-
gemeinen Punkt

$$\mathbf{X}(s) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \cdot t \\ 1 \end{pmatrix}$$

gebildet; diese schneidet die Gerade g
für $s = a - t^2$. Dann gilt für den ge-
spiegelten Punkt C die Beschreibung

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{X}(-a + t^2),$$

also ist

$$\mathbf{C}(t) = \begin{pmatrix} t \cdot (1 + 2 \cdot a) - 2 \cdot t^3 \\ 2 \cdot t^2 - a \end{pmatrix}.$$

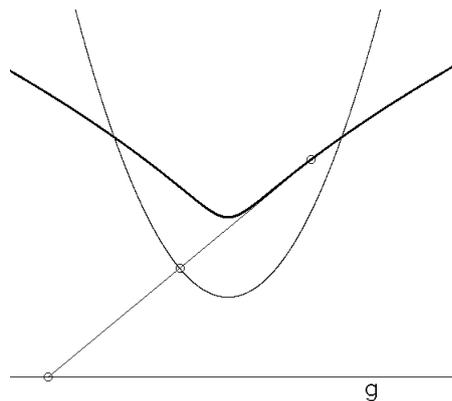
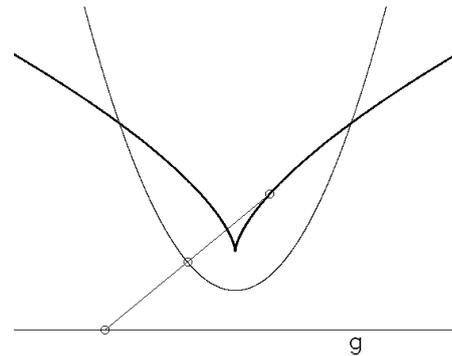
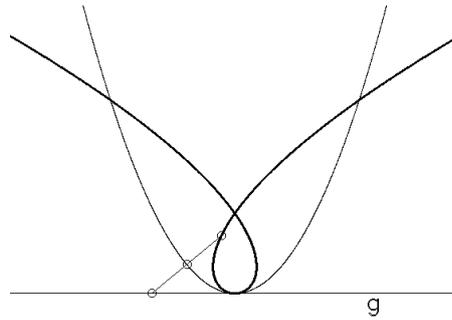
Welche Gestalt haben die Kurven?
Verschiedene Werte von a führen zu
verschiedenen Typen.

Diesen Überblick erhält man aber nur,
wenn man systematisch den Parame-
ter a variiert! Das Unterrichtsziel ei-
ner selbständigen systematischen Va-
riation kommt im gewöhnlichen Un-
terricht der Vektorgeometrie viel zu
kurz. Meine Unterrichtserfahrungen
haben gezeigt, dass Lernende (in
Grund- und Leistungskurs) hier zu-
nächst beträchtliche Defizite haben.

Die so angestrebte Klassifikation
kennen die Schüler in der Kurvendis-
kussion von Funktionsscharen, aber
kaum in der Vektorgeometrie.

Im Grundkurs kann man es mit einer
„optischen Klassifikation“ mit Hilfe
von dynamischer Geometrie-Software
bewenden lassen. Im Leistungskurs
kann die schlechte Bildschirmauflö-
sung ein Motiv sein, die Kurven (wie

oben) auszurechnen und die auftretenden Phänomene (Schleifen, Spitzen, Wende-
punkte) analytisch zu kennzeichnen. Abhängig von der Eindringtiefe in den Ge-
genstand wird man die bekannten Begriffe und Methoden organisch erweitern.
Diese Entwicklung wird vom Untersuchungsobjekt gesteuert.



Hier sind viele *Variationen* möglich:

- Statt der Parabel nehme man andere Ausgangskurven: Kreis, Ellipse, kubische Parabel, ...
- Was passiert, wenn die Gerade g nicht senkrecht zur Parabelachse verläuft?
- Gibt es Möglichkeiten, aus der Parabel andere interessante Kurven zu gewinnen? Die letzte Frage wird in Meyer (1998b) dahingehend beantwortet, dass man alle achsensymmetrischen kubischen Kurven, die rational parametrisierbar sind, aus der Parabel gewinnen kann.

Für weitere „Parabel-Derivate“ siehe Meyer (1999).

Ziel der Variationen ist es, Phantasie sowie Eigenständigkeit zu entwickeln. Genau hierin liegt der didaktische Nutzen von Computer-Algebra-Systemen!

Die *Ziele der Variation* bestehen also *nicht* darin, dass die Schülerinnen und Schüler irgendwelche weiteren, von der Lehrperson vorgegebenen Probleme lösen, sondern möglichst *selber schöpferisch Problemsituationen erzeugen*. Daher sind die Variationen nicht als durchzunehmendes Programm gedacht, sondern allenfalls als Anregungen an die Lerngruppe. Die Lernenden wollen vielleicht auch andere Aspekte untersuchen.

Methodisch liegt hier keine konvergente Situation vor. Es machen nicht alle Schülerinnen und Schüler das gleiche, aber alle beschäftigen sich mit ggf. selbst erzeugten mathematischen Fragestellungen, und das ist mehr, als herkömmlicher Unterricht zu bieten hat.

Nun kann die Lehrperson nicht einfach mit dem Impuls beginnen: „Nun macht mal was!“, sondern eine solche Objektexploration muss mit einem vorgeführten geeigneten Beispiel initiiert werden (aber nur *initiiert!*).

Durch interessante Objekte kann der Mathematikunterricht nur belebt werden, zumal, wenn die Objekte nicht von der Lehrperson vorgegeben sind, sondern von den Schülerinnen und Schülern selber erzeugt werden.

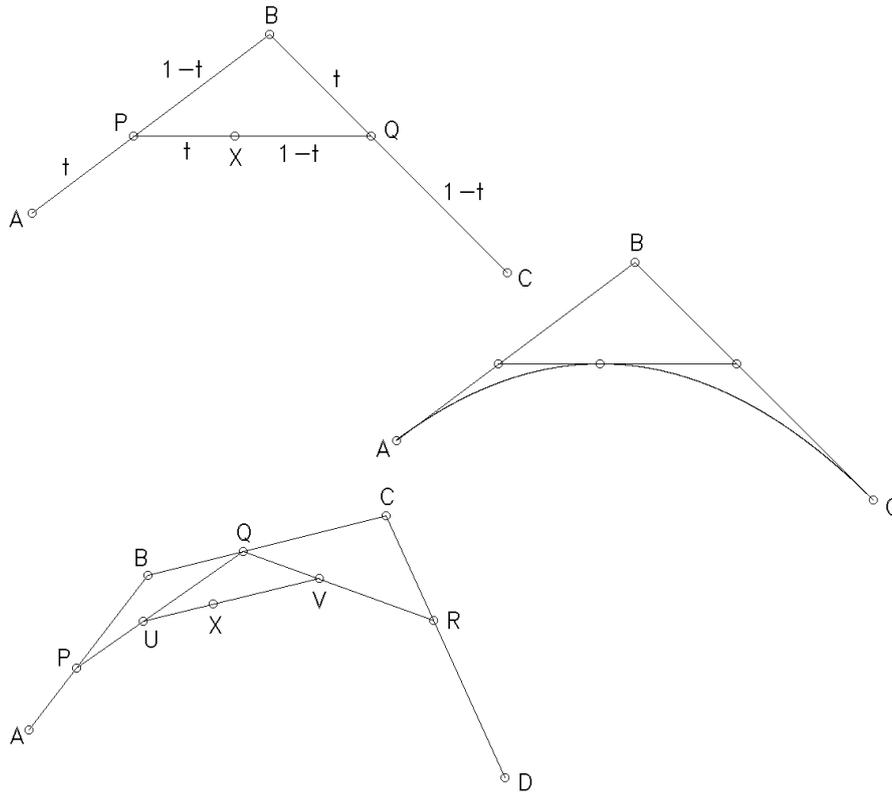
Weitere Argumente für die Behandlung höherer Kurven siehe Schupp/Dabrock (1995, S. 287 ff).

6. Eine andere Erzeugungsart: Bézierkurven

Gegeben seien 3 Punkte A, B und C, die nicht kollinear sind. P teile AB im Ver-

hältnis $\frac{AP}{PB} = \frac{t}{1-t}$.

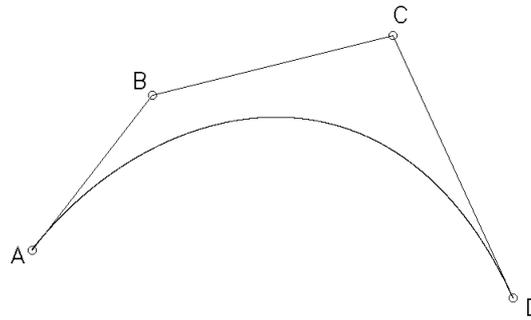
Q teile BC im selben Verhältnis. X teile PQ wiederum im selben Verhältnis. Wird t variiert, so bewegt sich X auf einer *Parabel*.

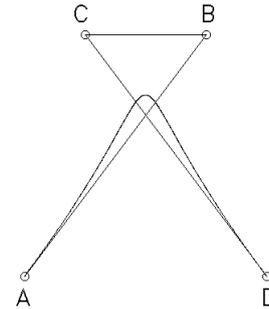
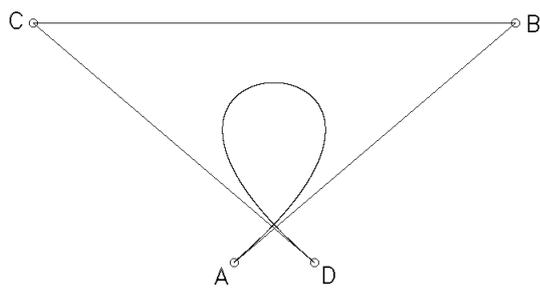


Stets sind AB und BC Tangenten, und durch interaktive Variation von A, B oder C lässt sich die Lage und Gestalt der Parabel abändern.

Man kann das obige Vorgehen auch mit 4 Punkten durchführen und bekommt dann Kurven folgenden Aussehens (Abbildung rechts und nächste Seite).

Man erkennt (und kann beweisen), dass die so erzeugten Kurven zum Teil mit denen im vorigen Abschnitt übereinstimmen.





Bei den Kurven dieses Abschnitts handelt es sich um *Bézierkurven*. Sie sind das Herzstück des Computer Aided Geometric Design. Es handelt sich um von Designern leicht zu manipulierende Freiformkurven, die bei der Konstruktion von Automobilen, aber auch bei der Definition von Schrifttypen immer noch eine große Rolle spielen. Näheres siehe Meyer (2000b) oder Farin (1994).

7. Ortsflächen im Raum

Nun waren alle bisherigen Beispiele in der Ebene angesiedelt. Das ist per se noch kein Manko, denn auch dort lassen sich gehaltvolle und interessante Objektuntersuchungen anstellen.

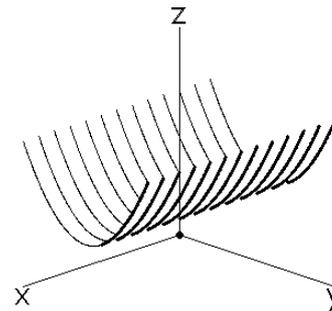
Eine Leitlinie der Untersuchungen in der Ebene war die Verfolgung von Ortskurven. Dieses Programm lässt sich ohne weiteres in den Raum fortsetzen:

Trivial sind die Fragen nach der Menge aller Punkte, die

- zu zwei Punkten
- zu einem Punkt und einer Ebene
- zu einer Ebene und einer dazu parallelen Geraden
- zu zwei zueinander parallelen oder sich schneidenden Geraden

den gleichen Abstand haben.

Was man über alle Punkte sagen kann, die zu einem Punkt und zu einer Geraden denselben Abstand haben, ist anschaulich überhaupt nicht klar! Führt man ein Koordinatensystem



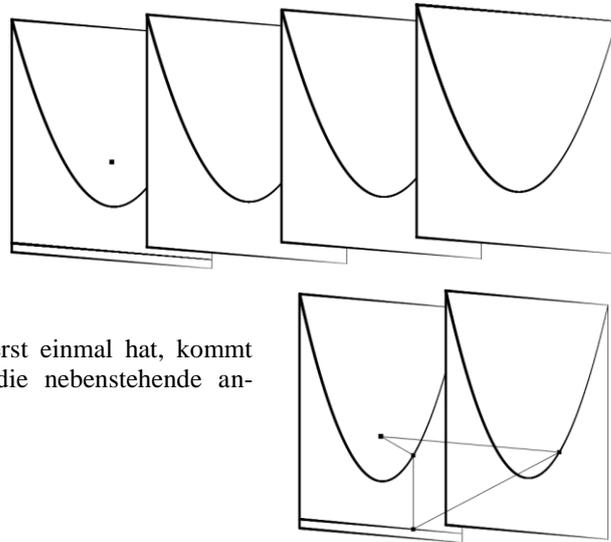
so ein, dass $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der gegebene Punkt und $g : X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die gegebene

Gerade ist, so erfüllt ein gleichabständiger Punkt $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ die Gleichung

$z = \frac{y^2 + 1}{2}$; x beliebig. Es handelt sich um eine *Parabelrinne* mit dem allgemeinen

Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ (y^2 + 1)/2 \end{pmatrix}$.

Hier zeigt sich, dass das mathematische Rechnen geometrische Probleme lösen kann, die sich der Anschauung zunächst entziehen wollen.



Wenn man das Ergebnis erst einmal hat, kommt man vielleicht auch auf die nebenstehende anschauliche Begründung.

8. Die Sattelfläche

Was kann man über alle Punkte $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sagen, die zu zwei zueinander windschiefen Geraden f und g gleichen Abstand haben?

Nun sollte man das Koordinatensystem so wählen, dass f und g eine möglichst einfache Darstellung mit hohem Symmetrieanteil haben.

Nun sollte man das Koordinatensystem so wählen, dass f und g eine möglichst einfache Darstellung mit hohem Symmetrieanteil haben.

Wenn sich f und g in der x - y -Ebene schneiden, haben sie o.B.d.A. die folgende Darstellung:

$$f: F_\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g: G_\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -m \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Verschiebt man nun f um eine Einheit in die positive z -Richtung und g um eine Einheit in die negative z -Richtung, so werden beide Geraden zueinander windschief, und man hat

$$f: F_\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g: G_\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -m \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man überlegt sich leicht, dass man zwei zueinander windschiefe Geraden immer so darstellen kann.

Etwas Rechnung zeigt nun, dass für gleich-

abständige Punkte $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ die Gleichung

$$z \cdot (1 + m^2) + x \cdot y \cdot m = 0 \quad \text{bzw.} \quad z = n \cdot x \cdot y$$

mit $n := -\frac{m}{1+m^2}$ gilt. Wie ist diese Gleichung zu interpretieren?

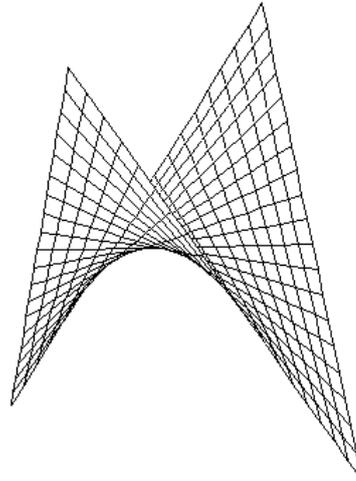
Zunächst macht man sich leicht klar, dass mit der erwähnten Gleichung eine Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x; y) \mapsto n \cdot x \cdot y$ gegeben ist; der Graph stellt also eine Fläche dar.

Gibt man die Gleichung in ein CAS ein, bekommt man einen Graphen, der mehr Fragen als Antworten aufwirft.

Einen ersten Aufschluss über die Fläche erhält man, indem man sie mit Ebenen schneidet, die zur x - y -Ebene parallel sind. (In der Geographie sind das die Höhenlinien eines Gebirges.)

Solche Ebenen haben die Gleichung $z = k$. Die sich aus $z = k$ und $z = n \cdot x \cdot y$ ergebende Schnittgleichung lautet $x \cdot y = \frac{k}{n}$. Für $k \neq 0$ handelt es sich um Hyperbelen, für $k = 0$ bekommt man die x -Achse und die y -Achse. Diese Kurven liegen vollständig in der Fläche!

Wenn die Schnittebenen die Gleichung $x = c$ haben, bekommt man $z = n \cdot c \cdot y$, also Geraden. Für unterschiedliche c sind diese Geraden zueinander windschief.



Bei der Schnittebenengleichung $y = d$ erhält man auch Geraden, diesmal aber von der Form $z = n \cdot d \cdot x$.

Das ist merkwürdig: Eine „krumme“ Fläche, die haufenweise Geraden, genauer zwei Scharen zueinander windschiefer Geraden enthält! (Aber das wurde durch den vorherigen Graphen auch schon angedeutet.) Solche Flächen heißen (doppelte) Regelflächen. Da sie aus Geraden „bestehen“, lassen sie sich besonders gut aus Fahrradspeichen zusammenlöten oder aus Gummibändern herstellen. Solche Re- almodelle sind für den Unterricht natürlich notwendig.

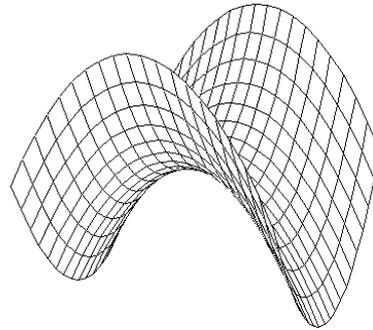
Haben die Schnittebenen hingegen die Gleichung $y = x + a$, so bekommt man $z = n \cdot x \cdot (x + a)$, also Parabeln, die ich p_a nenne. Man überlegt sich leicht, dass

$$\begin{pmatrix} -a/2 \\ a/2 \\ -n \cdot a^2/4 \end{pmatrix} \text{ der Scheitelpunkt von } p_a \text{ ist.}$$

Analog führt $y = -x + b$ zu $z = n \cdot x \cdot (-x + b)$, also zu Parabeln, die ich q_b nenne und die anders geöffnet sind als die erste Parabelschar (p_a) und gegenüber ihnen zudem um 90° gedreht sind.

Überraschenderweise gilt:

- Die Scheitelpunkte von p_a liegen alle auf q_0 .
- Die Scheitelpunkte von q_b liegen alle auf p_0 .



Γ ist eine *Schiebungsfläche*.

Wir haben also gesehen: Die Fläche „besteht“ aus allen Parabeln vom Typ p_a , ferner auch aus allen Parabeln vom Typ q_b .

Schließlich „besteht“ die Fläche auch aus Hyperbeln. Sie heißt daher *hyperbolisches Paraboloid*. Für den Unterricht ist der Name „Sattelfläche“ günstiger.

Es ist nun möglich, Tangenten dieser Fläche zu untersuchen, ohne mehrdimensionale Analysis bemühen zu müssen. Dazu überlegt man sich, was Tangenten sein sollen: Geraden, die mit der Fläche einen doppelten Schnittpunkt haben. (Analog lassen sich bekanntlich auch Parabeltangente in Klasse 9 ohne Analysis berechnen.)

$$\text{Ist } g: X = \begin{pmatrix} c \\ d \\ n \cdot c \cdot d \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \text{ Tangente in } Q = \begin{pmatrix} c \\ d \\ n \cdot c \cdot d \end{pmatrix},$$

so muss die Schnittgleichung $n \cdot c \cdot d + \lambda \cdot w = n \cdot (c + \lambda \cdot u) \cdot (d + \lambda \cdot v)$ bzw.

$$\lambda = 0 \vee \lambda \cdot n \cdot u \cdot v + (n \cdot u \cdot d + n \cdot v \cdot c - w) = 0$$

die doppelte Lösung $\lambda = 0$ haben. Dazu muss sein:

$$u \cdot v \neq 0 \quad \text{und} \quad n \cdot u \cdot d + n \cdot v \cdot c - w = 0.$$

$$\text{Wechsel der Schreibweise: } \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \cdot d \\ n \cdot c \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Man sieht: Alle Tangenten in $Q = \begin{pmatrix} c \\ d \\ n \cdot c \cdot d \end{pmatrix}$ müssen auf $\begin{pmatrix} n \cdot d \\ n \cdot c \\ -1 \end{pmatrix}$ senkrecht stehen.

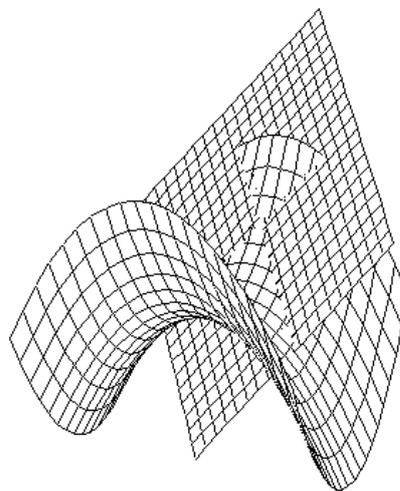
Sie liegen alle in der Ebene

$$T_Q: X \cdot \begin{pmatrix} n \cdot d \\ n \cdot c \\ -1 \end{pmatrix} = n \cdot c \cdot d.$$

T_Q heißt *Tangentialebene* zu Q .

Diese durchsetzt die Sattelfläche.

Weitere Untersuchungen zur Sattelfläche siehe Meyer (1995b; 2000c).



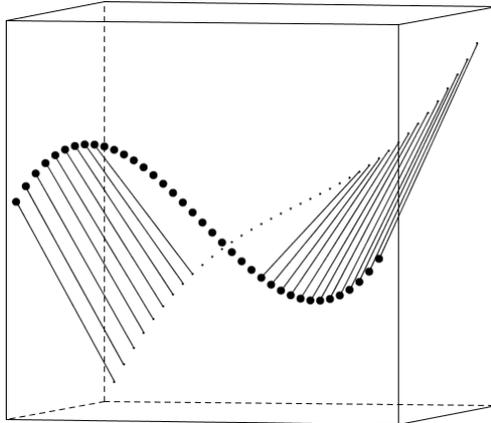
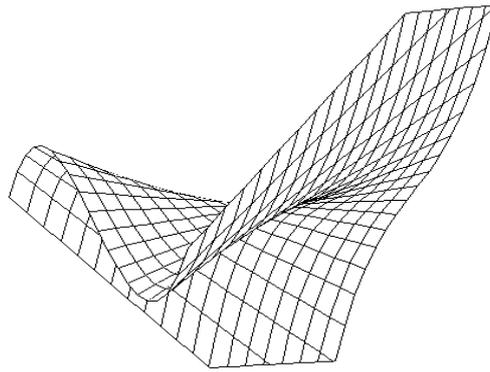
9. Die Faltenfläche

Fasst man die Funktionsvorschrift einer Parameterschar $z = f_b(x)$ als $z = f(x, b)$ auf, ist man bei der Gleichung einer Fläche.

Beispiel: Die bekannte Schar der kubischen Parabeln $f_b(x) = x^3 + b \cdot x$; sie führt zur Fläche mit der Gleichung $f(x, y) = x^3 + y \cdot x$. Der Computer liefert das globale Aussehen; gleichwohl wird man für den Unterricht ein Fadenmodell bereit halten.

Vorne links erkennt man den Graphen zu $z = x^3 - x$, hinten rechts den zu $z = x^3 + x$. Die Fläche hat offensichtlich eine *Falte*; daher wird sie im Unterricht *Faltenfläche* genannt.

Wie bei der Sattelfläche schneiden wir auch die Faltenfläche mit zueinander parallelen Ebenen. Die Ebenen mit $x = a$ liefern $z = a^3 + y \cdot a$, also Geraden. (Das sind die Fäden des Modells.)



Die Schnittkurve mit der zu $y = b$ gehörigen Ebene hat die Gleichung $z = x^3 + b \cdot x$; das ist relativ uninteressant, da man so wieder die alte parametrisierte Funktionsschar erhält.

Die Schnittkurve mit der zu $z = c$ gehörigen Ebene hat die Gleichung $y = \frac{c}{x} - x^2$. Asymptoten sind die y -Achse und die umgekehrte Normalparabel.

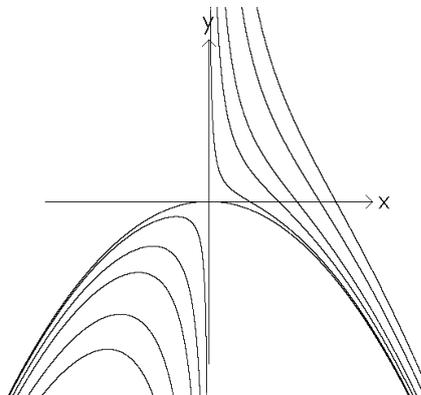
Auch diese Kurven findet man im Modell.

Wie bei der Sattelfläche lassen sich Flächentangenten wieder ohne Analysis ermitteln:

Die Gerade durch den Flächenpunkt

$P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a^3 + a \cdot b \end{pmatrix}$ hat den allgemeinen

Punkt $X(t) = P + t \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$.



Damit sie Tangente ist, muss die *Schnittgleichung*

$$(a+t \cdot u)^3 + (a+t \cdot u) \cdot (b+t \cdot v) = a^3 + a \cdot b + t \cdot w$$

die *doppelte* Lösung $t=0$ haben. Man überlegt sich leicht, dass $u=0$ zu einer (schon bekannten) Faden-Gerade führen würde. Eine Umformung der Schnittgleichung liefert

$$t \cdot (t^2 \cdot u^3 + t \cdot (3 \cdot a \cdot u^2 + u \cdot v) + (3 \cdot a^2 \cdot u + a \cdot v + b \cdot u - w)) = 0.$$

Sie hat die doppelte Lösung $t=0$, falls $w = 3 \cdot a^2 \cdot u + a \cdot v + b \cdot u$ ist. Dies lässt

sich schreiben als $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot a^2 + b \\ a \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ (Uminterpretation!). Das heißt: Alle Tan-

genten durch $P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a^3 + a \cdot b \end{pmatrix}$

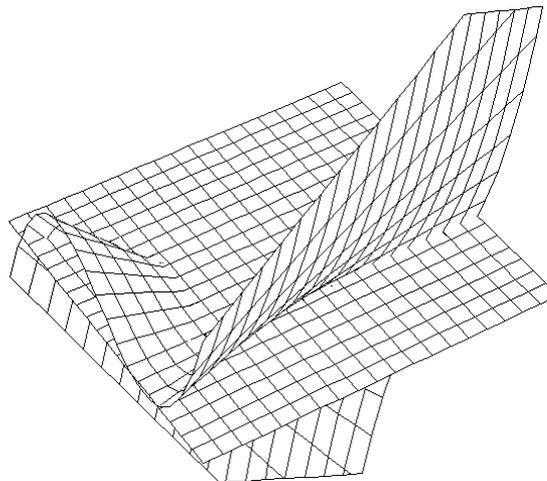
liegen in einer Ebene mit der Gleichung

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot a^2 + b \\ a \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot a^3 + a \cdot b.$$

Dies ist die *Tangentialebene*

zu $\begin{pmatrix} a \\ b \\ a^3 + a \cdot b \end{pmatrix}$, die (wie bei

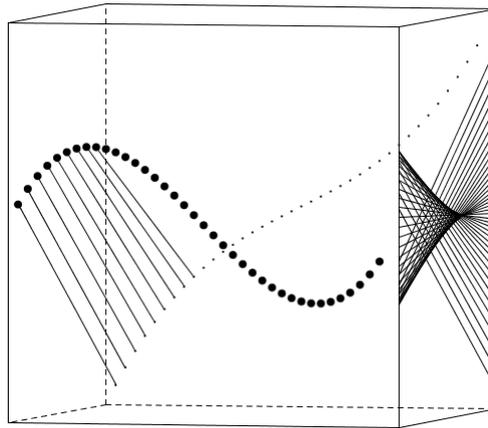
der Sattelfläche) die Faltenfläche durchsetzt.



Hier lädt das Objekt zu weiteren Explorationen ein:

- Was lässt sich über den Schnitt der Fläche mit einer Tangentialebene sagen?
- Gibt es auch Tangenten, die mit der Fläche einen dreifachen Schnittpunkt haben?
- Gibt es weitere interessante Kurven auf der Fläche?
- Guckt man von rechts auf das Modell, so hüllen alle Fäden eine Kurve ein; was ist das für eine?

Es dürfte deutlich werden, dass die Faltenfläche Anlass gibt zum Studium vielfältiger Objekte; es handelt sich um eine Unterrichtseinheit mit offenem Ende. Näheres siehe Meyer (1998); zu den Hüllkurven auch Meyer (1997b).



10. Bézierflächen

Die Sattelfläche ist das generierende Element von Bézierflächen, dem dreidimensionalen Analogon zu Bézierkurven.

Aus je 4 Punkten (im unteren Bild A, B, C und D, die nicht in einer Ebene liegen sollen) wird eine Sattelfläche erzeugt:

P durchläuft die Strecke AB, und Q durchläuft die Strecke CD, wobei jeweils

$$\frac{AP}{PB} = \frac{CQ}{QD} = \frac{t}{1-t}$$

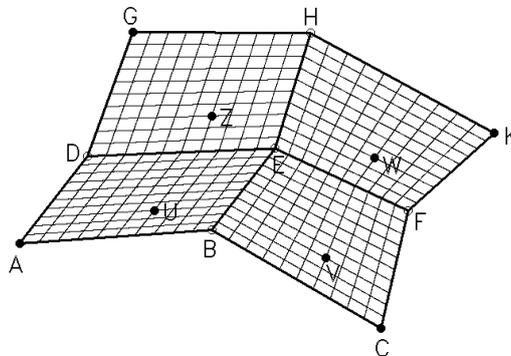
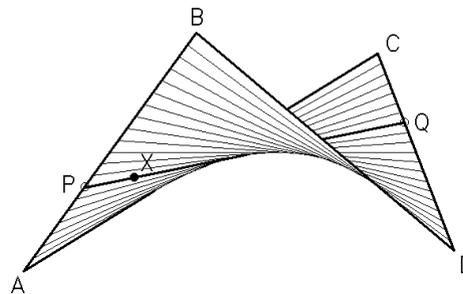
gelten soll.

Nun teile der Punkt X die Strecke PQ im Verhältnis

$$\frac{PX}{XQ} = \frac{s}{1-s}.$$

Zu A, B, C, D und den Parametern t und s gehört mithin der allgemeine Punkt X(t, s).

Nun wird der zweite Iterationsschritt erläutert. Wir gehen aus von 9 Punkten A, ..., K, die nicht alle in einer Ebene liegen sollen.



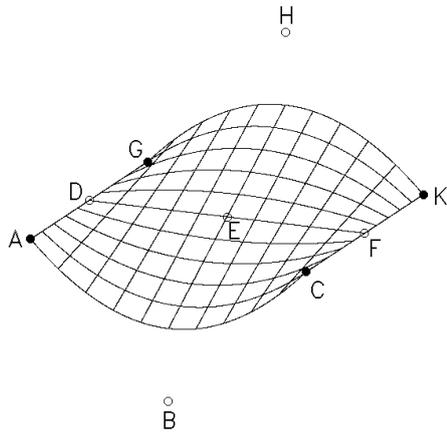
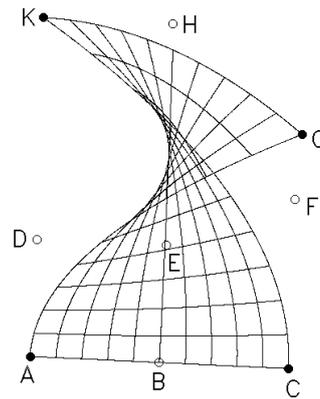
Zu A, B, E, D und den Parametern t und s wird der allgemeine Punkt $U(t, s)$ gebildet.

Zu B, C, F, E und den Parametern t und s wird der allgemeine Punkt $V(t, s)$ gebildet.

Zu E, F, K, H und den Parametern t und s wird der allgemeine Punkt $W(t, s)$ gebildet.

Zu D, E, H, G und den Parametern t und s wird der allgemeine Punkt $Z(t, s)$ gebildet.

U, V, W und Z liegen auf den entsprechenden Sattelflächen



Nun wird zu $U(t, s)$, $V(t, s)$, $W(t, s)$, $Z(t, s)$ und den Parametern t und s der allgemeine Punkt $X(t, s)$ gebildet. $X(t, s)$ ist der allgemeine Punkt der entstehenden Fläche.

Durch geeignete Wahlen von A, ..., K bekommt man interessante Flächen.

Durch Ziehen an den Punkten A, ..., K lassen sich die Flächen leicht interaktiv verändern, so dass Designer bequem mit ihnen umgehen können.

Näheres siehe Meyer (2000b) oder Farin (1994).

11. Projektionen

Aus den letzten Abschnitten dürfte auch deutlich geworden sein, dass die Darstellung dreidimensionaler Objekte auf den zweidimensionalen Bildschirm durchaus Inhalt eines Unterrichts in Vektorgeometrie sein könnte, obgleich gute Programme in zunehmendem Maße dem Benutzer diese Arbeit abnehmen. Gleichwohl sind die zugrunde liegenden Prinzipien relativ einfach; siehe Meyer (2000a).

Literatur

- Cukrowicz/Zimmermann (Hrsg., 2001): MatheNetz Klasse 9, Ausgabe N. Braunschweig: Westermann Schulbuchverlag.
- Farin (1994): Kurven und Flächen im Computer Aided Geometric Design. Braunschweig: Vieweg Verlag.
- Führer (1979): Objektstudien in der Vektorgeometrie. Didaktik der Mathematik 1, S. 32–61.
- Meyer (1995a): Kegelschnitte: Ein entdeckender Zugang. Der Mathematikunterricht 41(1), S. 34–42.
- Meyer (1995b): Die Sattelfläche im Grundkurs. Praxis der Mathematik 37(6), S. 250–255.
- Meyer (1996): Kegelschnitte mit Geometrie-Software. Mathematik betrifft uns 5, S. 1–31.
- Meyer (1997a): Bahnkurven in Klasse 9. Mathematik in der Schule 35(12), S. 691–698.
- Meyer (1997b): Hüllkurven. Praxis der Mathematik 39(3), S. 107–116 und 39(4), S. 170–173.
- Meyer (1998a): Eine Fläche mit einer Falte. In: Hischer, H. (Hrsg.): Geometrie und Computer. Suchen, Entdecken und Anwenden. Hildesheim: Franzbecker Verlag, S. 89–94.
- Meyer (1998b): Von der Normalparabel zu kubischen Kurven. mathematica didactica 21(2), S. 84–108.
- Meyer (1999): Spielereien mit der Parabel. In: Lohse, D. / Reineke, V. (Hrsg.): Didaktischer Arbeitskreis Schule – Universität (Universität Hannover), Symposiumsberichte.
- Meyer (2000a): Projektionen. In: Förster, F./Henn, H.-W./Meyer, J. (Hrsg.): Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Band 6. Hildesheim: Franzbecker Verlag, S. 104–117.
- Meyer (2000b): Ein Weg zu Bézier-Kurven. Mathematik in der Schule 38(5), S. 303–314.
- Meyer (2000c): Die Sattelfläche im Leistungskurs. Praxis der Mathematik 42(6), S. 253–257
- Tietze/Klika/Wolpers (2000): Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 2. Braunschweig: Vieweg Verlag.
- Schupp (2000a): Geometrie in der Sekundarstufe II. Journal für Mathematik-Didaktik 21(1), S. 50–66.
- Schupp (2000b): Kegelschnitte. Hildesheim: Franzbecker Verlag.
- Schupp/Dabrock (1995): Höhere Kurven. Mannheim: BI Wissenschaftsverlag.