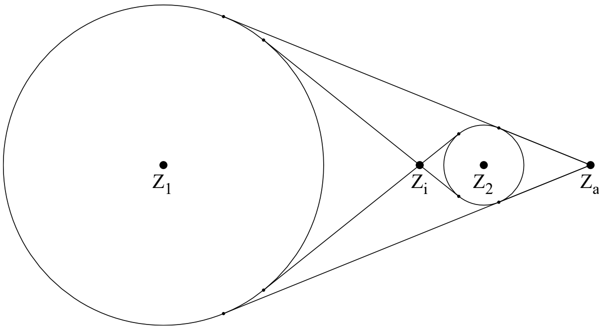
Dr. Jörg Meyer, Hameln

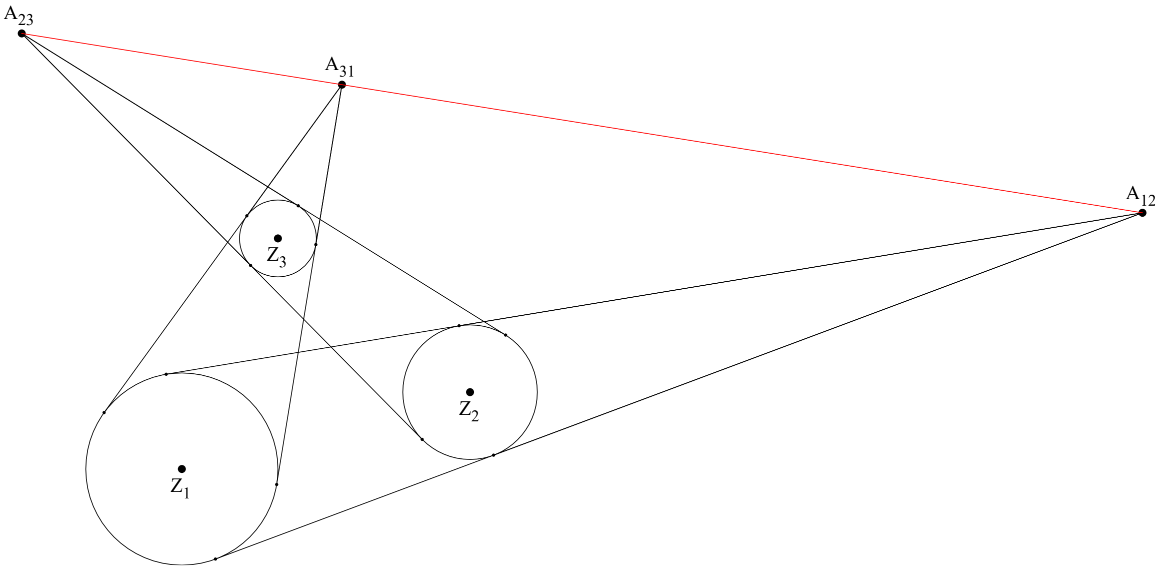
Zwei Sätze von Gaspard MONGE



Zwei (nicht konzentrische) Kreise haben gemeinsame Tangenten, die sich in den beiden Ähnlichkeitspunkten Z_a und Z_i schneiden. Haben die beiden Kreise die Mittelpunkte Z_1 und Z_2 sowie die Radien r_1 und r_2, so sieht man mit Hilfe der Strahlensätze schnell ein, dass man die beiden Ähnlichkeitspunkte

durch $\boxed{Z_i = \frac{r_2 \cdot Z_1 + r_1 \cdot Z_2}{r_1 + r_2}}$ und $\boxed{Z_a = \frac{r_2 \cdot Z_1 - r_1 \cdot Z_2}{r_2 - r_1}}$ bekommt.

Hat man drei Kreise K_1, K_2, K_3, dann auch drei äußere Ähnlichkeitspunkte A_{12}, A_{23}, A_{31}, und diese sind kollinear:



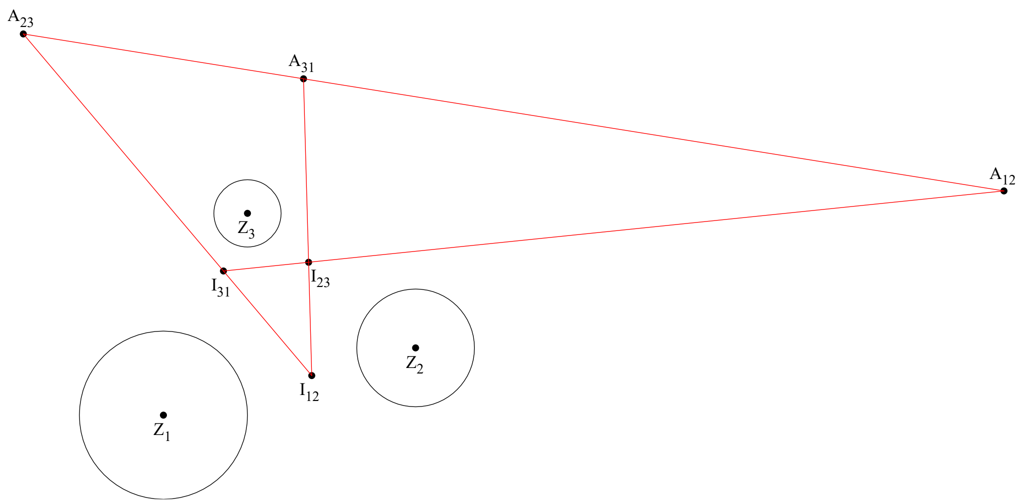
Warum ist das so? Wenn die Kreiszentren kollinear sind, ist nichts zu beweisen. Anderenfalls gilt:

Wegen $A_{12} = \frac{r_2 \cdot Z_1 - r_1 \cdot Z_2}{r_2 - r_1}$, $A_{23} = \frac{r_2 \cdot Z_3 - r_3 \cdot Z_2}{r_2 - r_3}$, $A_{31} = \frac{r_3 \cdot Z_1 - r_1 \cdot Z_3}{r_3 - r_1}$ ist

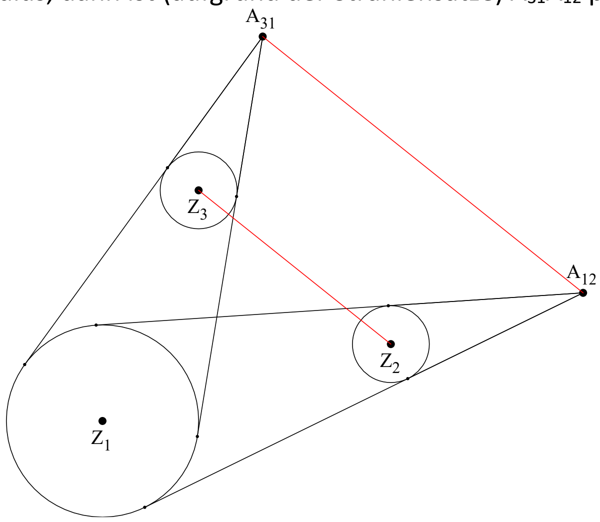
$$(r_2 - r_1) \cdot r_3 \cdot A_{12} + (r_2 - r_3) \cdot r_1 \cdot A_{23} + (r_3 - r_1) \cdot r_2 \cdot A_{31} = O,$$

woraus die Kollinearität folgt.

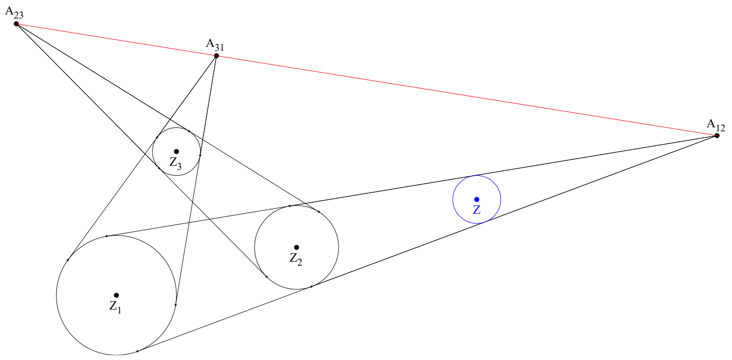
Die inneren Ähnlichkeitspunkte I_{12}, I_{23}, I_{31} bilden ein nicht ausgeartetes Dreieck, aber zusammen mit den äußeren Ähnlichkeitspunkten hat man wiederum Kollinearitäten, die man genauso beweist wie eben zur (größeren Übersicht wurden die Tangenten weggelassen):



Ein *rein geometrischer* Beweis macht sich den folgenden Sachverhalt zunutze[1]: Haben die Kreise um Z_2 und Z_3 den gleichen Radius, dann ist (aufgrund der Strahlensätze) $A_{31}A_{12}$ parallel zu Z_2Z_3.



Dann gilt in der folgenden Figur, in der zusätzlich der Kreis um Z mit dem Radius r_3 einezeichnet wurde, , dass ZZ_3 einerseits parallel ist zu $A_{31}A_{12}$ und andererseits zu $A_{23}A_{13}$, was die Kollinearität beweist.



Mit den inneren Ähnlichkeitspunkten argumentiert man analog.

MONGE selber hat es noch anders bewiesen[2]: „Denn denkt man sich an die drei Kugeln, für welche die drei gegebenen Kreise größte Kreise sind, eine Ebene gelegt, welche von allen dreien auf derselben Seite berührt wird, so berührt diese Ebene auch die drei Kegel, welche je zwei der Kugeln nach aussen einhüllen und geht durch deren Spitzen. Die drei Spitzen liegen aber auch in der Ebene, welche durch die drei Kugelmittelpunkte geht, und folglich, da sie also in zwei verschiedenen Ebenen enthalten sind, in einer geraden Linie.“

[1] Nach einer Idee von G. Aumann 82015): Kreisgeometrie, Springer-Verlag.

[2] G. Monge (1798): Darstellende Geometrie. 1900 Leipzig, S. 69.