Jörg MEYER, Hameln

23. 2. 2020

Mehrfache Achsenspiegelungen (geometrischer Weg)

1. Zweifache Achsenspiegelungen: Vorkenntnisse

Es ist bekannt und wird hier nicht bewiesen:

Jede *Translation* im Zweidimensionalen kann ersetzt werden durch eine Komposition von zwei Achsenspiegelungen. Die Achsen müssen zueinander parallel sein und zum Verschiebungsvektor senkrecht verlaufen sowie einen (gerichteten) Abstand zueinander haben, der der halben Länge des Verschiebungsvektors entspricht.

Jede *Drehung* im Zweidimensionalen kann ersetzt werden durch eine Komposition von zwei Achsenspiegelungen. Die Achsen müssen sich im Drehpunkt schneiden und einen (gerichteten) Winkel bilden, der dem halben Drehwinkel entspricht.

Insbesondere kann jede *Punktspiegelung* (= Drehung um 180°) ersetzt werden durch eine Komposition von zwei Achsenspiegelungen. Die Achsen müssen sich im Spiegelpunkt schneiden und orthogonal zueinander sein.

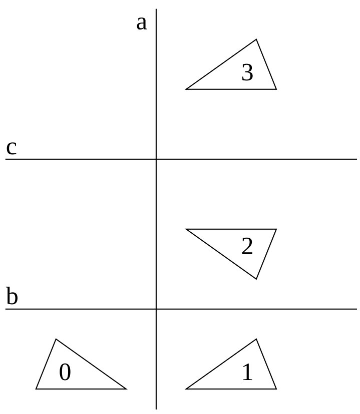
2. Schubspiegelungen

Hierbei handelt es sich um die Komposition einer Achsenspiegelung mit einer Translation parallel zur Achse. Spiegelt man erst an a, so hat man anschließend eine Doppelspiegelung an den Geraden b und c, die beide zu a senkrecht sind: $S_c \circ S_b \circ S_a$. Man kann also auch erst spiegeln am Schnittpunkt von a und b und anschließend spiegeln an c. Da die zur Translation gehörigen Achsen senkrecht sind zur Spiegelachse a, ist die Spiegelung an a vertauschbar mit der Translation bezüglich b und c:

$$S_c \circ S_b \circ S_a = S_a \circ S_c \circ S_b.$$

Dies kann man folgendermaßen einsehen: Spiegelt man an den zueinander orthogonalen Achsen u und v, so ist $S_u \circ S_v = S_v \circ S_u$ bzw. $(S_v \circ S_u)^{-1} \circ S_u \circ S_v = S_u \circ S_v \circ S_u \circ S_v = \mathrm{id}$ wegen $S_u \circ S_v \circ S_u \circ S_v = (S_u \circ S_v)^2 = \mathrm{id}$. Damit ist

$$S_b \circ S_c \circ S_a \circ S_c \circ S_b \circ S_a = S_b \circ S_a \circ S_c \circ S_c \circ S_b \circ S_a = S_b \circ S_a \circ S_b \circ S_a = S_b \circ S_b \circ S_a \circ S_a = \mathrm{id}.$$



Ferner ist nicht nur $S_c \circ S_b \circ S_a = S_a \circ S_c \circ S_b$, sondern wegen der Eigenschaft der Punktspiegelung auch $S_c \circ S_b \circ S_a = S_a \circ S_c \circ S_b = S_c \circ S_a \circ S_b$.

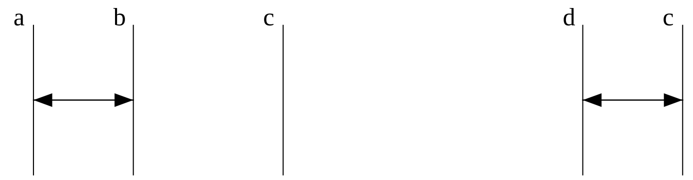
Generell gilt: Spiegelt man (in beliebiger Reihenfolge) an einem Punkt P und an einer Geraden g, die P nicht enthält, so handelt es sich um eine Schubspiegelung, da man die Spiegelung an P ersetzen kann durch eine zweifache Achsenspiegelung, wobei eine Achse zu g parallel ist.

3. Dreifache Achsenspiegelungen

Hier gibt es drei Fälle: Alle drei Achsen können zueinander parallel sein oder einen gemeinsamen Punkt haben oder weder alle kopunktal noch alle zueinander parallel sein.

Drei zueinander parallele Achsen

Die Komposition kann $S_c \circ S_b \circ S_a$ ersetzt werden durch $S_c \circ S_b \circ S_a = S_c \circ S_c \circ S_d = S_d$, also durch eine Einfachspiegelung.



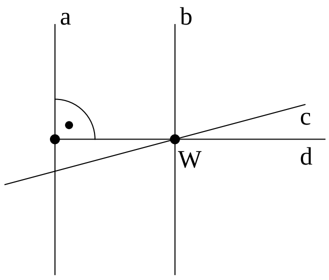
Drei Achsen mit gemeinsamem Schnittpunkt

Hier argumentiert man analog und kann die Dreifachspiegelung durch eine Einfachspiegelung ersetzen.

Drei Achsen, die weder alle zueinander parallel noch alle kopunktal sind

Dann haben zwei Achsen einen Schnittpunkt (hier W), und die dritte Achse verläuft nicht durch W.

Beginnen wir mit $S_a \circ S_b \circ S_c$. Wenn d durch den Schnittpunkt von b und c geht und senkrecht auf a steht, ist $S_a \circ S_b \circ S_c = \left(S_a \circ S_d\right) \circ S_d \circ S_b \circ S_c$.



Nach den Erkenntnissen oben kann die Dreifachspiegelung $S_d \circ S_b \circ S_c$ an kopunktalen Achsen ersetzt werden durch eine Einfachspiegelung an einer Achse, die auch durch W verläuft. Damit hat man die Komposition einer Punktspiegelung und einer Achsenspiegelung, also insgesamt eine Schubspiegelung.

Die anderen Reihenfolgen gestalten sich analog.

4. Zusammenfassung

Eine Dreifachspiegelung an Achsen, die entweder kopunktal sind oder zueinander parallel, kann ersetzt werden durch eine Einfachspiegelung.

Eine Dreifachspiegelung an Achsen, die weder kopunktal sind noch zueinander parallel, kann ersetzt werden durch eine Schubspiegelung.

5. Ausblick auf Kongruenzabbildungen

Eine Abbildung, bei denen immer die Bildfigur zur Originalfigur kongruent ist, kann festgelegt werden durch die Angabe eines Originaldreiecks ABC und des Bilddreiecks A‘B’C‘.

Zunächst spiegele man ABC an der Mittelsenkrechten zu A und A‘ und erhält so A’B‘‘C‘‘ mit möglichweise falschem Umlaufsinn. Ist der Umlaufsinn falsch, muss A’B‘‘C‘‘ an einer Achse durch A‘ gespiegelt werden und ggf. auch um A‘ gedreht werden. Diese Dreifachspiegelung an durch A‘ verlaufenden Achsen kann nach Obigem durch eine Einfachspiegelung ersetzt werden.

Ist der Drehsinn von A’B‘‘C‘‘ korrekt, so ist ggf. nur noch um A‘ zu drehen, was durch eine Doppelspiegelung an durch A‘ verlaufenden Achsen geleistet werden kann.

Insgesamt kann jede (nichttriviale) Kongruenzabbildung durch maximal drei Achsenspiegelungen realisiert werden, also durch eine Achsenspiegelung oder durch eine Drehung oder durch eine Translation oder durch eine Schubspiegelung.