Jörg MEYER, Hameln 5. 1. 2025

Variationen zur Lottoformel

Eine Urne enthalte zu Beginn R rote und B blaue Kugeln, und es sei $N=R+B$ die Gesamtanzahl.

Man zieht ohne Zurücklegen.

Die Wahrscheinlichkeit, bei n Ziehungen r rote und $b=n-r$ blaue Kugeln zu bekommen, beträgt bekanntlich $\frac{\binom{R}{r}\cdot\binom{B}{b}}{\binom{R+B}{r+b}}$ („Lottoformel"). Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten muss 1 sein, was auf die VANDERMONDE-Relation $\boxed{\sum_{r=0}^{n}\binom{R}{r}\cdot\binom{N-R}{n-r}=\binom{N}{n}}$ führt. Man kann beweisen, dass sie auch für negative Argumente gültig ist.

Ist $n=R=N-R$, so folgt $\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\cdot\binom{n}{n-r}=\boxed{\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}^2=\binom{2\cdot n}{n}}$.

Schreibt man[1] $(a)_n=a\cdot(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n-1)$ (n Faktoren aufwärts) und $(a)_{-n}=a\cdot(a-1)\cdot\ldots((a-n+1))$ (n Faktoren abwärts), so gilt $\binom{n}{k}=\frac{(n)_{-k}}{k!}$ sowie $\binom{n+k-1}{k}=\frac{(n)_k}{k!}$. Ferner ist

$$\frac{(-n)_k}{(n)_{-k}}=(-1)^k. \tag{+}$$

Die VANDERMONDE-Relation schreibt sich als

$$\boxed{(x+y)_n=\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\cdot(x)_k\cdot(y)_{n-k}} \tag{I}$$

und auch als

$$\boxed{(x+y)_{-n}=\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\cdot(x)_{-k}\cdot(y)_{-(n-k)}}. \tag{II}$$

(II) ist einfach zu beweisen: Wegen $(n)_{-k}=\binom{n}{k}\cdot k!$ ist zu zeigen, dass

$$\binom{x+y}{n}\cdot n!=\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\cdot\binom{x}{k}\cdot k!\cdot\binom{y}{n-k}\cdot(n-k)!,$$

und das ist VANDERMONDE.

[1] Diese POCHHAMMER-Symbole werden in der Literatur nicht einheitlich bezeichnet.

Für (I) kann man (+) vereenden oder analog zum Beweis von (II) vorgehen. Dann ist wegen $(n)_k = \binom{n+k-1}{k}\cdot k!$ zu zeigen, dass

$$\binom{x+y+n-1}{n}\cdot n! = \sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\cdot\binom{x+k-1}{k}\cdot k!\cdot\binom{y+n-k+1}{n-k}\cdot(n-k)!$$

bzw.

$$\binom{x+y+n-1}{n} = \sum_{k\geq 0}\binom{x+k-1}{k}\cdot\binom{y+n-k+1}{n-k}$$

Das ist ***nicht*** die VANDERMONDE-Relation, da k auch im oberen Argument auftritt. Dies lässt sich reparieren, denn wegen

$$(a)_{-b} = a\cdot(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-b+1) = (-1)^b\cdot(-a)\cdot(-a+1)\cdot\ldots\cdot(-a+b-1) = (-1)^b\cdot(b-a-1)_{-b}$$

ist

$$\binom{a}{b} = (-1)^b\cdot\binom{b-a-1}{b} \text{ und } \binom{b+a-1}{b} = (-1)^b\cdot\binom{-a}{b},$$

und damit ist zu zeigen, dass

$$\binom{-(x+y)}{n} = \sum_{k\geq 0}\binom{-x}{k}\cdot\binom{-y}{n-k}$$

gilt. Dies ist die VANDERMONDE-Relation für negative obere Argumente.