Jörg MEYER, Hameln Febr. 2024

Lineare Rekurrenzen vom Grad 2 als Verallgemeinerungen der FIBONACCI-Folge

Man kann bei der FIBONACCI-Folge ($f_1 = f_2 = 1;\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$) andere Startwerte nehmen oder eine andere Rekursionsbeziehung.

Andere Startwerte

Die Folge sei h_1, h_2, $\boxed{h_{n+2} = h_{n+1} + h_n}$.

Wenn $\frac{h_{n+1}}{h_n}$ gegen g konvergiert, dann $g^2 = g + 1$ mit den Lösungen $g_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $g_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, und zwar unabhängig von den beiden Startwerten. Der Ansatz

$$
\begin{aligned}
h_n &= A \cdot g_1^n + B \cdot g_2^n \\
h_1 &= A \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + B \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\
h_2 &= A \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} + B \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

liefert

$$A = \frac{\left(3-\sqrt{5}\right)\cdot h_1 + \left(\sqrt{5}-1\right)\cdot h_2}{2\cdot\sqrt{5}};\quad B = \frac{-\left(\sqrt{5}+3\right)\cdot h_1 + \left(\sqrt{5}+1\right)\cdot h_2}{2\cdot\sqrt{5}}.$$

Bei FIBONACCI ist $h_1 = h_2 = 1$ und damit $A = \frac{\left(3-\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{5}-1\right)}{2\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $B = \frac{-\left(\sqrt{5}+3\right)+\left(\sqrt{5}+1\right)}{2\cdot\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$.

$h_n = A \cdot g_1^n + B \cdot g_2^n$ stimmt für $n = 1$ und $n = 2$. Dann ist zu prüfen, ob

$$A \cdot g_1^{n+2} + B \cdot g_2^{n+2} - \left(A \cdot g_1^{n+1} + B \cdot g_2^{n+1} + A \cdot g_1^n + B \cdot g_2^n\right) = A \cdot g_1^n \cdot \left(g_1^2 - g_1 - 1\right) + B \cdot g_2^n \cdot \left(g_2^2 - g_2 - 1\right) = 0$$

gilt; dies ist aber offensichtlich.

Damit konvergiert $\frac{h_{n+1}}{h_n} = \frac{A \cdot g_1^{n+1} + B \cdot g_2^{n+1}}{A \cdot g_1^n + B \cdot g_2^n} = g_1 \cdot \frac{A + B \cdot \left(\frac{g_2}{g_1}\right)^{n+1}}{A + B \cdot \left(\frac{g_2}{g_1}\right)^n} \xrightarrow{n\to\infty} g_1$.

Andere Rekursionen

Die Folge sei u_1, u_2, ... $\boxed{u_{n+2} = r \cdot u_{n+1} + s \cdot u_n}$.

Wenn $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ gegen g konvergiert, dann $g^2 = r \cdot g + s$ mit den Lösungen $g_1 = \frac{r}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$; $g_2 = \frac{r}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ mit $\Delta = r^2 + 4 \cdot s$. Man hat 3 Fälle zu unterscheiden:

<u>Fall 1</u>: $\boxed{\Delta = r^2 + 4 \cdot s = 0}$

<u>Bsp.</u>: $u_{n+2} = 2 \cdot u_{n+1} - u_n$. In Abhängigkeit von den Anfangswerten bekommt man die Folgen

$0;\ u;\ 2 \cdot u;\ 3 \cdot u;\ 4 \cdot u;\ ...$ Man hat Divergenz in diesem Beispiel. Also ist allgemein keine Konvergenz zu erwarten.

<u>Fall 2</u>: $\boxed{\Delta = r^2 + 4 \cdot s < 0}$

<u>Bsp. 1:</u> $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$. In Abhängigkeit der Anfangswerte bekommt man

$u;\ v;\ v-u;\ -u;\ -v;\ u-v;\ u;\ v;\ ...$, also einen 6-Zyklus.

<u>Bsp. 2:</u> $u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$. In Abhängigkeit der Anfangswerte bekommt man

$u;\ v;\ -u-v;\ u;\ v;\ ...$ und damit einen 3-Zyklus.

Daher ist allgemein keine Konvergenz zu erwarten.

<u>Fall 3</u>: $\boxed{\Delta = r^2 + 4 \cdot s > 0}$

<u>Ansatz</u>: Mit $g_1 = \frac{r + \sqrt{\Delta}}{2}$; $g_2 = \frac{r - \sqrt{\Delta}}{2}$ sei

$$u_n = A \cdot g_1^n + B \cdot g_2^n$$
$$u_1 = A \cdot g_1 + B \cdot g_2$$
$$u_2 = A \cdot g_1^2 + B \cdot g_2^2$$

und damit $A = \frac{u_2 - g_2 \cdot u_1}{g_1 \cdot (g_1 - g_2)}$; $B = \frac{g_1 \cdot u_1 - u_2}{g_2 \cdot (g_1 - g_2)}$.

$u_n = A \cdot g_1^n + B \cdot g_2^n$ ist für $n=1$ und für $n=2$ richtig. Wie bei FIBONACCI folgt, dass die Gleichung dann auch für allgemeines n gilt und dass $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \to \infty} g_1$ konvergiert.

Bsp. 1: $u_{n+2} = 3 \cdot u_{n+1} - 2 \cdot u_n$; 1; 3; 7; 15; 31; 63; 127; ...$u_n = 2^n - 1$ mit der Gleichung $g^2 = 3 \cdot g - 2$ und damit $g_1 = 2;\ g_2 = 1$ in Übereinstimmung mit

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n - 1} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2^n}} = 2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2^n}} \xrightarrow{n \to \infty} 2 .$$

Bsp. 2: $s = 0$. Dann $\Delta = r^2 > 0;\ g_1 = \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r;\ g_2 = \frac{r}{2} - \frac{r}{2} = 0$ und $u_2 = u_1 \cdot r;\ A = \frac{u_1}{r};\ u_n = u_1 \cdot r^{n-1}$ (geometrische Folge).

Bsp. 3: 0; 1; 2; 5; 12; 29; $u_{n+2} = 2 \cdot u_{n+1} + u_n$

Die zugehörige Gleichung $g^2 = 2 \cdot g + 1$ hat die Lösungen $g_1 = 1 + \sqrt{2};\ g_2 = 1 - \sqrt{2}$.

Oben hat man gesehen, dass die Brüche $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ gegen $g_1 = 1 + \sqrt{2}$ konvergieren; man hat also hiermit ein Verfahren, $\sqrt{2}$ durch rationale Zahlen anzunähern. (Es gibt auch andere Möglichkeiten.)

Rechts sieht man in der linken Spalte die Folge u_n, in der Mitte die Brüche u_{n+1}/u_n, und in der rechten Spalte wurde von der mittleren Spalte jeweils 1 abgezogen und dann quadriert.

0		
1		
2	2	1
5	2,5	2,25
12	2,4	1,96
29	2,416667	2,006944
70	2,413793	1,998811
169	2,414286	2,000204
408	2,414201	1,999965
985	2,414216	2,000006