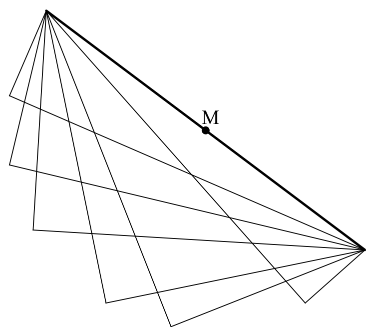
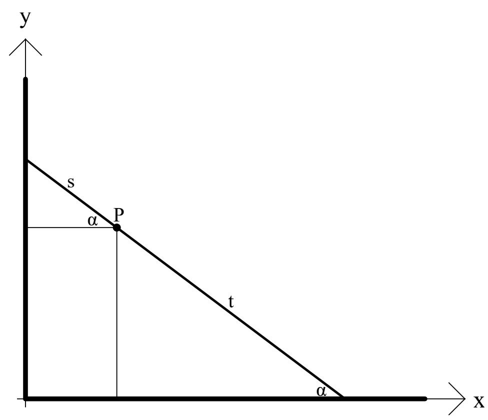
Jörg MEYER, Hameln

Variationen zur rutschenden Leiter



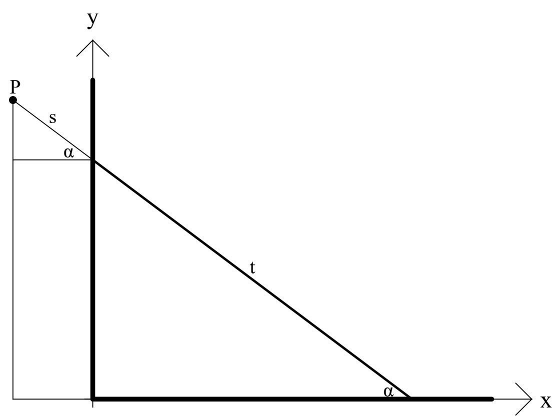
Eine Leiter rutscht eine senkrecht stehende Hauswand hinunter. Welche Kurve beschreibt ihr Mittelpunkt M? Hier kann man sich die Leiter als fest vorstellen und die Hausecke als beweglich.
Nach der Umkehrung des Satzes von Thales liegen alle Hausecken auf einem Kreis, der Abstand zwischen Hausecke und Leitermittelpunkt M ist also konstant.
Daher bewegt sich der Mittelpunkt M auf einem Kreis um die Hausecke.

Was ändert sich, wenn man den Mittelpunkt M durch einen beliebigen anderen Punkt P ersetzt, der die Leiter im Verhältnis s : t teilt?



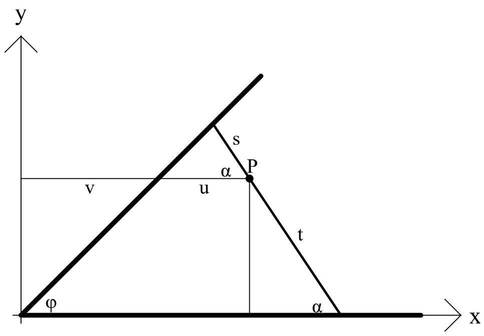
Fußboden und Hauswand bilden ein Koordinatensystem, und es sei $P=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Wegen $\cos\alpha=\frac{x}{s}$ (links oben) und $\sin\alpha=\frac{y}{t}$ (rechts unten) ist $P=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s\cdot\cos\alpha \\ t\cdot\sin\alpha \end{pmatrix}$; P beschreibt also eine Ellipse.



Liegt P auf der Verlängerung der Leiter der Länge t, bekommt man auch eine Ellipse:
Wegen $\cos\alpha=\frac{-x}{s}$ und $\sin\alpha=\frac{y}{s+t}$ ist
$P=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -s\cdot\cos\alpha \\ (s+t)\cdot\sin\alpha \end{pmatrix}$.

Was passiert, wenn die Hauswand schief steht?



Wegen $\sin\alpha = \frac{y}{t}$ und wegen $\cos\alpha = \frac{u}{s}$ und $\cot\varphi = \frac{v}{y}$ ist $x = u + v = s\cdot\cos\alpha + t\cdot\sin\alpha\cdot\cot\varphi$ und damit $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\cdot\cos\alpha + t\cdot\sin\alpha\cdot\cot\varphi \\ t\cdot\sin\alpha \end{pmatrix}$, also eine gescherte Ellipse. Auch gescherte Ellipsen sind Ellipsen (die Kurve bleibt quadratisch und bleibt auch geschlossen).