Jörg MEYER, Hameln 23. 12. 2025

LEGENDRE-Polynome

Inhalt

Worum geht es?

Die LEGENDRE-Polynome L_n bilden bezüglich $f \circ g = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x) \cdot dx$ ein Orthogonalsystem. RODRIGUES hat Polynome R_n beschrieben, die mit L_n übereinstimmen, aber besser handhabbar sind und zu einer Differentialgleichung und zu einer Rekursion führen. Durch eine erzeugende Funktion werden Polynome E_n beschrieben, die wiederum mit den L_n übereinstimmen.

Die nicht-polynomialen Lösungen der Differentialgleichung heißen LEGENDRE-Funktionen; diese werden hier nur erwähnt, aber nicht näher betrachtet.

Zugang über orthogonale Polynome

Die linear unabhängigen Vektoren $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ lassen sich nach GRAM/SCHMIDT orthogonalisieren zu

$$B_0 = A_0;\; B_1 = A_1 - \frac{B_0 \cdot A_1}{B_0^2} \cdot B_0;\; B_2 = A_2 - \frac{B_0 \cdot A_2}{B_0^2} \cdot B_0 - \frac{B_1 \cdot A_2}{B_1^2} \cdot B_1$$

$$B_3 = A_3 - \frac{B_0 \cdot A_3}{B_0^2} \cdot B_0 - \frac{B_1 \cdot A_3}{B_1^2} \cdot B_1 - \frac{B_2 \cdot A_3}{B_2^2} \cdot B_2$$

...

$$B_{n+1} = A_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k \cdot A_{n+1}}{B_k^2} \cdot B_k$$

Mit dem Skalarprodukt $f \circ g = \int\limits_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x) \cdot dx$ lassen sich die Ausgangsfunktionen

$a_0(x) = 1$, $a_1(x) = x$, $a_2(x) = x^2$, $a_3(x) = x^3$, ... nach GRAM/SCHMIDT orthogonalisieren zu

$$b_0(x) = \boxed{1 = b_0(x)}$$

$$b_1(x) = x - \overset{0}{\frac{1 \circ x}{1 \circ 1}} \cdot b_0(x) = \boxed{x = b_1(x)}$$

$$b_2(x) = x^2 - \frac{1 \circ x^2}{1 \circ 1} \cdot b_0(x) - \overset{0}{\frac{x \circ x^2}{b_1^2}} \cdot b_1(x) = x^2 - \frac{2/3}{2} \cdot 1 = \boxed{x^2 - \frac{1}{3} = b_2(x)}$$

$$b_3(x) = x^3 - \overset{0}{\frac{1 \circ x^3}{1 \circ 1}} \cdot b_0(x) - \frac{x \circ x^3}{x \circ x} \cdot b_1(x) - \frac{\overbrace{\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \circ x^3}^{0}}{\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \circ \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = x^3 - \frac{2/5}{2/3} \cdot x = \boxed{x^3 - \frac{3}{5} \cdot x = b_3(x)}$$

$$b_4(x) = x^4 - \frac{1 \circ x^4}{1 \circ 1} \cdot 1 - \overset{0}{\frac{x \circ x^4}{x \circ x}} \cdot x - \frac{\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \circ x^4}{\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \circ \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) - \frac{\overbrace{\left(x^3 - \frac{3}{5} \cdot x\right) \circ x^4}^{0}}{\left(x^3 - \frac{3}{5} \cdot x\right) \circ \left(x^3 - \frac{3}{5} \cdot x\right)} \cdot \left(x^3 - \frac{3}{5} \cdot x\right)$$

$$= x^4 - \frac{2/5}{2} \cdot 1 - \frac{16/105}{8/45} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \boxed{x^4 - \frac{6}{7} \cdot x^2 + \frac{3}{35} = b_4(x)}$$

...

$$\boxed{b_{n+1}(x) = x^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k \circ x^{n+1}}{b_k \circ b_k} \cdot b_k(x)}$$

mit dem Ergebnis (linke Spalte)

1	1
x	x
$x^2-\frac{1}{3}$	$\frac{3x^2-1}{2}$
$x^3-\frac{3x}{5}$	$\frac{x(5x^2-3)}{2}$
$x^4-\frac{6x^2}{7}+\frac{3}{35}$	$\frac{35x^4-30x^2+3}{8}$
$x^5-\frac{10x^3}{9}+\frac{5x}{21}$	$\frac{x(63x^4-70x^2+15)}{8}$
$x^6-\frac{15x^4}{11}+\frac{5x^2}{11}-\frac{5}{231}$	$\frac{231x^6-315x^4+105x^2-5}{16}$
$x^7-\frac{21x^5}{13}+\frac{105x^3}{143}-\frac{35x}{429}$	$\frac{x(429x^6-693x^4+315x^2-35)}{16}$
$x^8-\frac{28x^6}{15}+\frac{14x^4}{13}-\frac{28x^2}{143}+\frac{7}{1287}$	$\frac{6435x^8-12012x^6+6930x^4-1260x^2+35}{128}$

gerade/ungerade

Für gerades n ist b_n eine gerade Funktion, für ungerades n ist b_n eine ungerade Funktion.

Ist n gerade und sind $b_1, b_3, \ldots, b_{n-1}$ ungerade sowie $b_0, b_2, .., b_n$ gerade, so ist

$$b_{n+1}(x)=x^{n+1}-\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k\circ x^{n+1}}{b_k\circ b_k}\cdot b_k(x)=x^{n+1}-\sum_{\substack{k=0\\ k\equiv 1\ (2)}}^{n}\overbrace{\overbrace{\frac{b_k\circ x^{n+1}}{b_k\circ b_k}}^{\text{gerade}}\cdot\overset{\text{ungerade}}{b_k(x)}}^{\text{ungerade}}$$ ungerade. Analog

argumentiert man für gerade n.

Normierung

Normiert man die b_n so, dass sie bei 1 den Wert 1 haben, bekommt man die Polynome L_n (rechte Spalte). Diese sind nach Adrien-Marie LEGENDRE (1752–1833) benannt (bekannt durch das LEGENDRE-Symbol im quadratischen Reziprozitätsgesetz, durch quadratische Formen, durch lineare Regression, …; er hat auch ein einflussreiches Buch zur Geometrie geschrieben). Es gibt mehrere andere Möglichkeiten, die LEGENDRE-Polynome einzuführen.

Zugang über die RODRIGUES-Beziehung

Mit $f^{(n)}$ als n-ter Ableitung wird im Folgenden immer wieder die bekannte LEIBNIZ-Beziehung

$$(u\cdot v)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot u^{(k)}(x)\cdot v^{(n-k)}(x)$$ verwendet werden.

Benjamin Olinde RODRIGUES (1795–1851) hat Polynome R_n über

$$\boxed{R_n(x)=\frac{r_n^{(n)}(x)}{2^n\cdot n!}\ \text{ mit }\ r_n(x)=\left(x^2-1\right)^n}$$

eingeführt. Es wird sich zeigen, dass sie mit den L_n übereinstimmen, jedoch besser handhabbar sind als die L_n.

Bei den ersten Werten stimmen R_n und L_n überein:

$$R_0(x) = \frac{\left(\left(x^2-1\right)^0\right)^{(0)}}{2^0 \cdot 0!} = 1 = L_0(x)$$

$$R_1(x) = \frac{\left(\left(x^2-1\right)^1\right)^{(1)}}{2^1 \cdot 1!} = x = L_1(x)$$

$$R_2(x) = \frac{\left(x^4-2\cdot x^2+1\right)^{(2)}}{2^2 \cdot 2!} = \frac{12\cdot x^2-4}{8} = \frac{3\cdot x^2-1}{2} = L_2(x)$$

$$R_3(x) = \frac{\left(x^6-3\cdot x^4+3\cdot x^2-1\right)^{(3)}}{2^3 \cdot 3!} = \frac{120\cdot x^3-72\cdot x}{48} = \frac{5\cdot x^3-3\cdot x}{2} = L_3(x)$$

Die Orthogonalität der R_n

Es reicht zu zeigen, dass die Funktion mit $r_n^{(n)}(x) = \left(\left(x^2-1\right)^n\right)^{(n)}$ zueinander orthogonal sind. Dazu sei $m<n$. Dann folgt mit partieller Integration

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{r_n^{(n)}(x)}_{u} \cdot \underbrace{r_m^{(m)}(x)}_{v'} \cdot dx = r_n^{(n)}(x) \cdot r_m^{(m-1)}(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} r_n^{(n+1)}(x) \cdot r_m^{(m-1)}(x) \cdot dx$$

Der erste Summand nach dem Gleichheitszeichen enthält immer den Faktor x^2-1 und verschwindet deshalb. Daher gilt

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \underbrace{r_n^{(n)}(x)}_{u} \cdot \underbrace{r_m^{(m)}(x)}_{v'} \cdot dx &= -\int_{-1}^{1} r_n^{(n+1)}(x) \cdot r_m^{(m-1)}(x) \cdot dx \\ &= \pm \int_{-1}^{1} r_n^{(n+2)}(x) \cdot r_m^{(m-2)}(x) \cdot dx \\ &\dots \\ &= \pm \int_{-1}^{1} \underbrace{r_n^{(n+m)}(x)}_{=0} \cdot r_m(x) \cdot dx = 0\end{aligned}$$

Zur expliziten Form der $R_n(x)$

$$\begin{aligned}2^n \cdot n! \cdot R_n(x) &= \left(\left(-1+x^2\right)^n\right)^{(n)} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k \cdot x^{2\cdot n-2\cdot k}\right)^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k \cdot \left(x^{2\cdot n-2\cdot k}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k \cdot \frac{(2\cdot n-2\cdot k)!}{(n-2\cdot k)!} \cdot x^{n-2\cdot k}\end{aligned}$$

und deshalb

$$\boxed{R_n(x)=\frac{1}{2^n}\cdot\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\cdot\frac{(2\cdot n-2\cdot k)!}{k!\cdot(n-k)!\cdot(n-2\cdot k)!}\cdot x^{n-2\cdot k}=c_0+c_1\cdot x+\ldots+c_n\cdot x^n}.$$

Der führende Koeffizient gehört zu $k=0$ und lautet $\boxed{c_n=\frac{Z_n}{2^n}}$ mit $Z_n:=\binom{2\cdot n}{n}$, was sich auch aus der unten behandelten Rekursionsgleichung ergeben wird.

Die Differentialgleichung der R_n

Es erweist sich als sinnvoll, etwas mit den Ableitungen von $r_n(x)=\left(x^2-1\right)^n$ zu spielen:

Zerlegt man die Potenz gemäß $r_n(x)=\left(x^2-1\right)^n=\underbrace{\left(x^2-1\right)}_{v(x)}\cdot\underbrace{\left(x^2-1\right)^{n-1}}_{r_{n-1}(x)}$, bekommt man

$$r_n'(x)=n\cdot r_{n-1}(x)\cdot 2\cdot x \text{ und somit } v(x)\cdot r_n'(x)=n\cdot r_n(x)\cdot 2\cdot x.$$

Leitet man beide Seiten von der letzten Gleichung (n+1)-mal ab[1], ergibt sich

$$\left(v(x)\cdot r_n'(x)\right)^{(n+1)}=2\cdot n\cdot\left(x\cdot r_n(x)\right)^{(n+1)}$$

$$\sum_{k\geq 0}\binom{n+1}{k}\cdot v^{(k)}(x)\cdot r_n^{(n+2-k)}(x)=2\cdot n\cdot\sum_{k\geq 0}\binom{n+1}{k}\cdot x^{(k)}\cdot r_n^{(n+1-k)}(x)$$

$$v(x)\cdot r_n^{(n+2)}(x)+(n+1)\cdot 2\cdot x\cdot r_n^{(n+1)}(x)+\binom{n+1}{2}\cdot 2\cdot r_n^{(n)}(x)=2\cdot n\cdot\left(x\cdot r_n^{(n+1)}(x)+(n+1)\cdot r_n^{(n)}(x)\right)$$

$$v(x)\cdot r_n^{(n+2)}(x)+2\cdot x\cdot r_n^{(n+1)}(x)=n\cdot(n+1)\cdot r_n^{(n)}(x)$$

Mit $R_n(x)=\frac{r_n^{(n)}(x)}{2^n\cdot n!}$ ist $R_n'(x)=\frac{r_n^{(n+1)}(x)}{2^n\cdot n!}$ und $R_n''(x)=\frac{r_n^{(n+2)}(x)}{2^n\cdot n!}$ folgt die nach LEGENDRE benannte Differentialgleichung

$$\left(x^2-1\right)\cdot R_n''(x)+2\cdot x\cdot R_n'(x)=\boxed{\frac{d}{dx}\left(\left(x^2-1\right)\cdot R_n'(x)\right)=n\cdot(n+1)\cdot R_n(x)}.$$

Andere Lösungen der Differentialgleichung

Die Differentialgleichung hat neben R_n auch eine weitere davon linear unabhängige Lösung, die allerdings kein Polynom mehr ist und LEGENDRE-Funktion der 2. Art genannt wird. Das wird schon bei $n=0$ sichtbar mit

$$\frac{d}{dx}\left(\left(x^2-1\right)\cdot R_0'(x)\right)=0$$

$$\left(x^2-1\right)\cdot R_0'(x)=A$$

$$R_0(x)=\frac{A}{2}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}+B$$

[1] [1] Vorgehensweise nach Fichtenholz (1997): Differential- und Integralrechnung 1, S. 224 f.

Die linear unabhängigen Lösungen sind $L_0(x)=1$ und $Q_0(x)=\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}$.

Bei $n=1$ hat man[2] die Lösungen $L_1(x)=x$ und $Q_1(x)=L_1(x)\cdot Q_0(x)-1$.

Bei $n=2$ hat man die Lösungen $L_2(x)=\frac{3\cdot x^2-1}{2}$ und $Q_2(x)=L_2(x)\cdot Q_0(x)-\frac{3}{2}\cdot x$.

Die sich abzeichnende Struktur wird hier nicht weiter verfolgt.

Ist in der Differentialgleichung n nicht ganz, nennt man die (hier nicht weiter betrachteten) Lösungen LEGENDRE-Funktionen der 1. Art.

Die Rekursion der R_n

Zerlegt man wieder die Potenz gemäß $r_n(x)=\left(x^2-1\right)^n=\underbrace{\left(x^2-1\right)}_{v(x)}\cdot\underbrace{\left(x^2-1\right)^{n-1}}_{r_{n-1}(x)}$ und leitet n-mal ab,

ergibt sich einerseits

$$r_n^{(n)}(x)=\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\cdot v^{(k)}(x)\cdot r_{n-1}^{(n-k)}(x)=v(x)\cdot r_{n-1}^{(n)}(x)+n\cdot 2\cdot x\cdot r_{n-1}^{(n-1)}(x)+\binom{n}{2}\cdot 2\cdot r_{n-1}^{(n-2)}(x)$$

sowie andererseits[3], wenn man die Ableitungsfolge zerlegt,

$$\begin{aligned} r_n^{(n)}(x)&=\left(r_n'\right)^{(n-1)}(x)=\left(n\cdot\left(x^2-1\right)^{n-1}\cdot 2\cdot x\right)^{(n-1)}=2\cdot n\cdot\left(x\cdot r_{n-1}(x)\right)^{(n-1)}\\ &=2\cdot n\cdot\sum_{k\geq 0}\binom{n-1}{k}\cdot x^{(k)}\cdot r_{n-1}^{(n-1-k)}(x)=2\cdot n\cdot\left(x\cdot r_{n-1}^{(n-1)}(x)+(n-1)\cdot 1\cdot r_{n-1}^{(n-2)}(x)\right)\end{aligned}$$

Die Elimination von $r_{n-1}^{(n-2)}(x)$ liefert

$$r_n^{(n)}(x)-2\cdot v(x)\cdot r_{n-1}^{(n)}(x)-n\cdot 2\cdot x\cdot r_{n-1}^{(n-1)}(x)=0.$$

Wegen $R_n(x)=\frac{r_n^{(n)}(x)}{2^n\cdot n!}$ ist $R_{n-1}(x)=\frac{r_{n-1}^{(n-1)}(x)}{2^{n-1}\cdot(n-1)!}$, $R_{n-1}'(x)=\frac{r_{n-1}^{(n)}(x)}{2^{n-1}\cdot(n-1)!}$, also

$$R_n(x)=\frac{x^2-1}{n}\cdot R_{n-1}'(x)+x\cdot R_{n-1}(x)$$

bzw.

$$(n+1)\cdot R_{n+1}(x)=\left(x^2-1\right)\cdot R_n'(x)+x\cdot(n+1)\cdot R_n(x)$$

Für die angestrebte Rekursionsformel benötigt man noch $R_n'(x)$. Es war

$$r_n^{(n)}(x)=2\cdot n\cdot\left(x\cdot r_{n-1}^{(n-1)}(x)+(n-1)\cdot 1\cdot r_{n-1}^{(n-2)}(x)\right);$$

---

[2] El Attar (2009): Legendre Polynomials and Functions, S. 14, 77.

[3] Vorgehensweise nach Strubecker (1967): Einführung in die höhere Mathematik II, S. 677 f.

analog folgt

$$r_n^{(n+1)}(x) = (r_n')^{(n)}(x) = \left(n \cdot r_{n-1}(x) \cdot 2 \cdot x\right)^{(n)}$$
$$= 2 \cdot n \cdot \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} \cdot x^{(k)} \cdot r_{n-1}^{(n-k)}(x) = 2 \cdot n \cdot \left(x \cdot r_{n-1}^{(n)}(x) + n \cdot 1 \cdot r_{n-1}^{(n-1)}(x)\right)$$

bzw.

$$R_n'(x) = x \cdot R_{n-1}'(x) + n \cdot R_{n-1}(x).$$

Die Elimination von $R_{n-1}'(x)$ aus den beiden erhaltenen Gleichungen

$$R_n(x) = \frac{x^2 - 1}{n} \cdot R_{n-1}'(x) + x \cdot R_{n-1}(x)$$
$$R_n'(x) = x \cdot R_{n-1}'(x) + n \cdot R_{n-1}(x)$$

liefert

$$\left(x^2 - 1\right) \cdot R_n'(x) = x \cdot n \cdot R_n(x) - n \cdot R_{n-1}(x).$$

Das führt zur angestrebten Rekursion

$$\boxed{(n+1) \cdot R_{n+1}(x) = x \cdot (2 \cdot n + 1) \cdot R_n(x) - n \cdot R_{n-1}(x)}$$

bzw.

$$\boxed{R_{n+2}(x) = \frac{(2 \cdot n + 3) \cdot x \cdot R_{n+1}(x) - (n+1) \cdot R_n(x)}{n+2}}.$$

Ist $R_n(1) = R_{n+1}(1) = 1$, so ist $R_{n+2}(1) = \frac{(2 \cdot n + 3) \cdot 1 - (n+1) \cdot 1}{n+2} = 1$.

Demnach stimmen R_n und L_n für $x = 1$ überein.

Den führenden Koeffizienten von $R_n(x) = c_n \cdot x^n + x^{n-1} \cdot (...)$ bekommt man mit $S(x) = x^n \cdot R\left(\frac{1}{x}\right)$ aus $S(0)$. Man hat

$$(n+2) \cdot R_{n+2}(x) = (2 \cdot n + 3) \cdot x \cdot R_{n+1}(x) - (n+1) \cdot R_n(x)$$
$$(n+2) \cdot x^{n+2} \cdot R_{n+2}\left(\frac{1}{x}\right) = (2 \cdot n + 3) \cdot \frac{1}{x} \cdot x^{n+2} \cdot R_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) - (n+1) \cdot x^{n+2} \cdot R_n\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$(n+2) \cdot S_{n+2}(x) = (2 \cdot n + 3) \cdot S_{n+1}(x) - (n+1) \cdot x^2 \cdot S_n(x)$$
$$(n+2) \cdot S_{n+2}(0) = (2 \cdot n + 3) \cdot S_{n+1}(0)$$
$$(n+2) \cdot c_{n+2} = (2 \cdot n + 3) \cdot c_{n+1}$$

Die letzte Gleichung ist richtig für $c_k = \frac{Z_k}{2^k}$.

Zugang über die erzeugende Funktion

Wegen $\binom{-1/2}{n}=\left(\frac{-1}{4}\right)^n\cdot\binom{2\cdot n}{n}=\left(\frac{-1}{4}\right)^n\cdot Z_n$ mit $Z_n=\binom{2\cdot n}{n}$ sei im geeigneten Konvergenzbereich

(d.h. $\left|t\cdot(t-2\cdot x)\right|<1;\ |t|^2+|2\cdot x\cdot t|<1$)

$$\begin{aligned}
\sum_{n\ge0} E_n(x)\cdot t^n &= \left(t\cdot(t-2\cdot x)+1\right)^{-1/2}\\
&=\sum_{n\ge0}\binom{-1/2}{n}\cdot t^n\cdot(t-2\cdot x)^n=\sum_{n\ge0}\left(\frac{-1}{4}\right)^n\cdot Z_n\cdot t^n\cdot(t-2\cdot x)^n\\
&=\sum_{n\ge0}\left(\frac{2\cdot x-t}{4}\right)^n\cdot Z_n\cdot t^n\\
&=1+\frac{2\cdot x-t}{4}\cdot 2\cdot t+\frac{4\cdot x^2-4\cdot x\cdot t+t^2}{4^2}\cdot 6\cdot t^2+\frac{8\cdot x^3-12\cdot x^2\cdot t+6\cdot x\cdot t^2-t^3}{4^3}\cdot 20\cdot t^3+\ldots\\
&=1+x\cdot t+\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot x^2\right)\cdot t^2+\left(-\frac{3}{2}\cdot x+\frac{5}{2}\cdot x^3\right)\cdot t^3+\ldots.
\end{aligned}$$

Offenbar ist $E_n(x)=L_n(x)$ für kleine n. Um zu zeigen, dass das immer so ist, wird

$$\sum_{n\ge0} E_n(x)\cdot t^n=\frac{1}{\sqrt{1+t\cdot(t-2\cdot x)}}$$

auf beiden Seiten nach t abgeleitet[4] mit dem Resultat

$$\left(\sum_{n\ge0} E_n(x)\cdot n\cdot t^{n-1}\right)\cdot\left(1+t\cdot(t-2\cdot x)\right)=\frac{x-t}{\sqrt{1+t\cdot(t-2\cdot x)}}=(x-t)\cdot\sum_{n\ge0} E_n(x)\cdot t^n$$

$$\sum_{n\ge0} E_n(x)\cdot n\cdot t^{n-1}+\sum_{n\ge0} E_n(x)\cdot n\cdot t^{n+1}-2\cdot x\cdot\sum_{n\ge0} E_n(x)\cdot n\cdot t^n=x\cdot\sum_{n\ge0} E_n(x)\cdot t^n-\sum_{n\ge0} E_n(x)\cdot t^{n+1}$$

Der Koeffizientenvergleich bei t^{n+1} liefert

$$(n+2)\cdot E_{n+2}(x)=x\cdot E_{n+1}(x)\cdot(2\cdot n+3)-(n+1)\cdot E_n(x)$$

und damit dieselbe Rekursion wie bei R_n. Daher ist $E_n(x)=R_n(x)$.

[4] Idee: https://en.wikipedia.org/wiki/Legendre_polynomials (21.12.25)