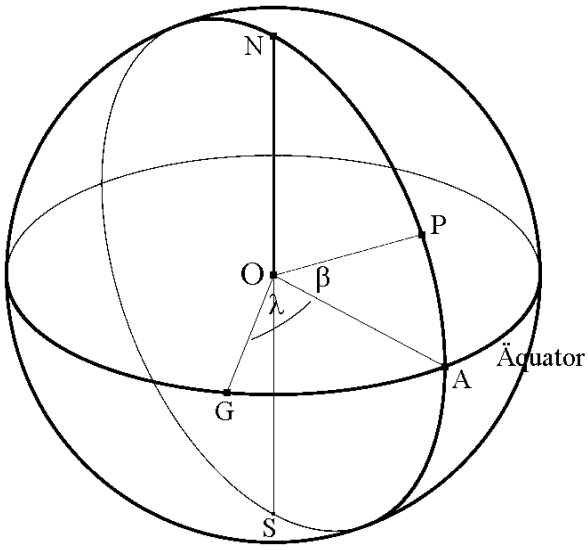
Jörg MEYER, Hameln

# Trigonometrie auf der Kugel:
# Wie weit ist es von Hannover nach Tokio?

Wie beschreibt man Punkte auf der Erde, die hier als kugelförmig angenommen wird und den Radius 1 haben soll? Die Kugel hat Nordpol N, Südpol S und Mittelpunkt O.

Zu jedem Kugelpunkt P gehört ein eindeutig bestimmter Punkt A auf dem Äquator.
Auf dem Äquator gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt G, durch den der Greenwich-Großkreis verläuft.
In der Äquatorebene gehört also zu A ein eindeutig bestimmter Winkel $\lambda$, die geographische Länge.




Somit ist in der Äquatorebene $A=\begin{pmatrix}\cos\lambda\\ \sin\lambda\end{pmatrix}$

bzw. im Raum $A=\begin{pmatrix}\cos\lambda\\ \sin\lambda\\ 0\end{pmatrix}$. Ferner ist $N=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Um P zu verorten, betrachten wir den Großkreis durch A, P und N.
Der Winkel $\beta$ liegt nicht in der Äquatorebene; er gibt die geographische Breite an. Der Winkel $\beta$ ist durch $-90°\le\beta\le 90°$ eingeschränkt. Dann ist

$$P=\cos\beta\cdot A+\sin\beta\cdot N=\cos\beta\cdot\begin{pmatrix}\cos\lambda\\ \sin\lambda\\ 0\end{pmatrix}+\sin\beta\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}\cos\lambda\cdot\cos\beta\\ \sin\lambda\cdot\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix}=:\left\langle\begin{matrix}\lambda\\ \beta\end{matrix}\right\rangle}.$$

Wie weit ist es von Hannover mit $H=\left\langle\begin{matrix}\lambda_H\\ \beta_H\end{matrix}\right\rangle=\left\langle\begin{matrix}9{,}8°\\ 52{,}4°\end{matrix}\right\rangle$ nach Tokio mit $T=\left\langle\begin{matrix}\lambda_T\\ \beta_T\end{matrix}\right\rangle=\left\langle\begin{matrix}140°\\ 35{,}8°\end{matrix}\right\rangle$?

Ist die Erde die Einheitskugel, so ist das Skalarprodukt $H\cdot T=1\cdot 1\cdot\cos\alpha$, und man bekommt $\alpha\approx 81{,}72°$. Damit hat der Kreisbogen zwischen Hannover und Tokio die Länge $2\cdot\pi\cdot R\cdot\frac{\alpha}{360°}\approx 9087$ mit Erdradius $\approx 6371$, was der im Internet zu findenden Luftlinie $9089{,}5$ recht gut entspricht.

**Literatur**

Cukrowicz / Zimmermann (Hrsg.): MatheNetz Klasse 10. Ausgabe N. 2002: Braunschweig: Westermann Schulbuchverlag.

Meyer, J.: Einblick in die Erd-Kunde. In: Istron-Band 9 (2006); Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht (Schriftenreihe der Istron-Gruppe). 2006: Hildesheim: Franzbecker Verlag. (Hier wird auch der Flächeninhalt von Dreiecken auf der Kugel behandelt.)