Jörg MEYER, Hameln

5. 7. 2023

Aus einem Kreis wird eine Parabel oder eine Hyperbel

Bekanntlich wird der allgemeine Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ des Kreises mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ durch die Achsenstreckung $x = \frac{u}{a};\ y = \frac{v}{b}$ bzw. $u = a \cdot x;\ v = b \cdot y$ abgebildet auf $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot \cos t \\ b \cdot \sin t \end{pmatrix}$ mit der Gleichung $\left(\frac{u}{a}\right)^2 + \left(\frac{v}{b}\right)^2 = 1$, die eine ***Ellipse*** darstellt.

Die Abbildung $x = \frac{v-1}{v+1};\ y = \frac{u}{v+1}$ bzw. $u = \frac{2 \cdot y}{1-x};\ v = \frac{1+x}{1-x}$ liefert die Gleichung $v = \frac{u^2}{4}$, also eine ***Parabel*** mit dem allgemeinen Punkt

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{1-x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot y \\ 1+x \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\cos t} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot \sin t \\ 1+\cos t \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \cdot \sin^2 \frac{t}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \cdot \sin\frac{t}{2} \cdot \cos\frac{t}{2} \\ 2 \cdot \cos^2 \frac{t}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cot\frac{t}{2} \\ \cot^2 \frac{t}{2} \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung $x = \frac{1}{u};\ y = \frac{v}{u}$ bzw. $u = \frac{1}{x};\ v = \frac{y}{x}$ liefert die Gleichung $u^2 - v^2 = 1$, also eine ***Hyperbel*** mit dem allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t \end{pmatrix}$.

Die Abbildung $x = \frac{2}{u+v};\ y = \frac{u-v}{u+v}$ bzw. $u = \frac{1+y}{x};\ v = \frac{1-y}{x}$ liefert die Gleichung $u \cdot v = 1$, also eine ***Hyperbel*** mit dem allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{x} \cdot \begin{pmatrix} 1+y \\ 1-y \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos t} \cdot \begin{pmatrix} 1+\sin t \\ 1-\sin t \end{pmatrix}$.