Jörg MEYER, Hameln

26. Okt. 2023

Warum ist die Konfidenz-Ellipse eine Ellipse? Zwei Wege

In der Konfidenztheorie stößt man auf die Gleichung

$$h = p \pm c \cdot \sqrt{p \cdot (1-p)} \text{ mit } 0 < c < 1$$

Bzw.

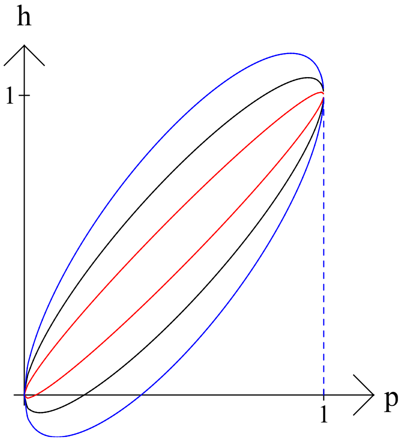
$$(h-p)^2 = c^2 \cdot p - c^2 \cdot p^2 .$$

Rechts sieht man die zugehörigen Kurven für unterschiedliche Werte von c.

Die Kurven sehen aus wie Ellipsen, deren große Achsen für unterschiedliche Werte von c unterschiedlich geneigt sind.

Dass der Wertebereich von h nicht vollständig innerhalb des Intervalls [0; 1] liegt, soll hier außer Acht bleiben.

Warum sind das Ellipsen?



Die Gleichung $(y-x)^2 = c^2 \cdot x - c^2 \cdot x^2$ ist quadratisch, stellt also einen Kegelschnitt dar. Die Frage ist nur, um welchen Kegelschnitt es sich handelt.

Erster Weg

Wir homogenisieren zu $y^2 - 2 \cdot x \cdot y + \left(1+c^2\right) \cdot x^2 = c^2 \cdot x \cdot z$, schneiden mit der Ferngeraden ($z = 0$) und erhalten $y^2 - 2 \cdot x \cdot y + \left(1+c^2\right) \cdot x^2 = 0$, teilen durch x^2 und setzen dann $u = \frac{y}{x}$ mit dem Ergebnis $u^2 - 2 \cdot u + \left(1+c^2\right) = 0$. Wenn $z = 0$ ist, muss also $u^2 - 2 \cdot u + \left(1+c^2\right) = 0$ sein. Die Schnittstellen mit der Ferngeraden sind daher $u_{1,2} = 1 \pm i \cdot c$. Da es keine reellen Schnittstellen gibt, handelt es sich um eine Ellipse.

Zweiter Weg

Der $h \cdot p$-Term auf der linken Seite der Gleichung $(h-p)^2 = c^2 \cdot p - c^2 \cdot p^2$ behindert die Erkenntnis, um welche Art von Kegelschnitt es sich hierbei handelt. Kennt man sich in Linearer Algebra etwas aus, wird man eine Hauptachsentransformation vornehmen, d.h. die Kurve so drehen und verschieben, dass sich der Kegelschnitt-Typ leicht ablesen lässt. Statt dessen kann man auch eine Scherung vornehmen. Da bei einer Scherung Ellipsen wieder in Ellipsen übergehen (http://Mathematik-Meyer.de/Materialien/AffAbb.pdf), ist dies ein legitimer Weg.

Um den $h \cdot p$-Term zu beseitigen, scheren wir mit der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, gehen also über von $\begin{pmatrix} p \\ h \end{pmatrix}$ zu $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + k \cdot h \\ h \end{pmatrix}$. Dann ist $h = v$ und $p = u - k \cdot v$. Man bekommt eine Gleichung, deren $u \cdot v$-Term für $k = \frac{-1}{c^2+1}$ verschwindet. Mit $d = c^2 + 1$ lautet die Gleichung

$$d^2 \cdot u^2 - c^2 \cdot d \cdot u + c^2 \cdot v^2 - c^2 \cdot v = 0$$

$$\left(d \cdot u - \frac{c^2}{2}\right)^2 + \left(c \cdot v - \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{c^4}{4} + \frac{c^2}{4} = \frac{c^2 \cdot d}{4}$$

Hieraus ist klar, dass es sich um eine Ellipse handeln muss.