Jörg MEYER, Hameln

Letzte Bearbeitung am 31. 10. 2024

Kegelschnitte mit Geometrie – Software

Überarbeitete und erweiterte Version[1]

[1] Eine kürzere Version erschien unter dem Titel „Kegelschnitte: Ein entdeckender Zugang“ in der Zeitschrift „Der Mathematikunterricht“ **41** (1), S. 34 - 42 (1995).
Eine ausführlichere Version erschien unter dem Titel „Kegelschnitte mit Geometrie- Software“ in der Zeitschrift „Mathematik betrifft uns“ 5 (1996), S. 1 – 31.

0. Einleitung

0.1 Didaktische Bemerkungen

Warum Kegelschnitte in der Schule?

1. Sie können in vorzüglicher Weise dazu dienen, bisher Gelerntes in Analysis und Vektorgeometrie anzuwenden, zu vertiefen und mit Sinn zu versehen. Analysis lernt man ja nicht nur für die Kurvendiskussion und Vektorgeometrie nicht nur für Schnittpunktsbestimmung zweier linearer Gebilde; ferner sind diese beiden Gebiete auch nicht zueinander disjunkt!

2. Kegelschnitte können in methodischer Hinsicht ein optimales Betätigungsfeld entdeckenden Lernens abgeben, seit es Software zur experimentellen Geometrie gibt! Die Sätze sind konstruktiv gut zugänglich und anschaulich zu machen, und die einfache Erzeugung von Ortslinien liefert erst die Möglichkeit, geometrische Fragestellungen gezielt zu untersuchen. Der Ausbau der Pol–/Polarentheorie zu Hüllkurven führt auf ästhetisch sehr ansprechende und damit motivierende Graphiken, deren Erstellung (und Behandlung) ohne Computer eine Zumutung wäre.

3. Natürlich sind die Sätze nicht nur zu entdecken, sondern auch zu beweisen! Warum eigentlich? Da man interaktiv in kurzer Zeit eine sehr große Anzahl an Spezialfällen experimentell überprüfen kann und dann natürlich kein Schüler ernsthaft annimmt, es dabei nur mit Ausnahmefällen zu tun zu haben, entfällt weitgehend die (schon bisher fragwürdige) Funktion eines Beweises als Ergebnissicherung. Viel bedeutender ist ja, dass Beweise Einsicht vermitteln können! (Warum beweist man sonst –auch in der Schule– manche Sätze mehrfach? Und warum gibt man sich sonst nicht damit zufrieden, dass „die Mathematiker“ das alles schon vor Hunderten oder Tausenden von Jahren bewiesen haben?) Genau dies Bedürfnis nach Einsicht wird durch ein interaktives Geometrieprogramm sehr angeregt; die Schüler stellen Fragen, anstatt Antworten auf ungestellte Fragen zu erhalten, und zwar u.a. aus folgenden Gründen:

Viele Sachverhalte über Kegelschnitte sind zunächst überraschend; die Neugier wird angeregt (dies ist ein klassisches Beweismotiv). Ferner werden die Sachverhalte in ihrer Vielzahl bald unübersichtlich; so dass das Bedürfnis nach Strukturierung, nach lokalem Ordnen, nach Zusammenhängen entsteht: „Ist das neue Phänomen wirklich neu und muss ich es mir zusätzlich merken, oder handelt es sich nur um alten Wein in einem neuen Schlauch?“

0.2 Methodische Bemerkungen

Der von mir vorgeschlagene Weg zu den Kegelschnitten knüpft an Bekanntes an: Die Schüler kennen Mittelsenkrechten als Menge von Punkten, die zu zwei Punkten denselben Abstand haben, dann Winkelhalbierende als Menge von Punkten, die zu zwei Geraden denselben Abstand haben. Die natürliche Fortsetzung ist der Mischtyp: Welche Punkte haben von einem Punkt und einer Geraden denselben Abstand? Was passiert, wenn man die Gerade durch einen Kreis ersetzt?

Um deutlich zu machen, dass Schüler selbständig auf diesem Gebiet aktiv werden können, habe ich fast den gesamten Stoff in Form von Aufgaben konzipiert (die allerdings in dieser Datei aus Gründen der besseren Lesbarkeit auch gleich die Lösungen enthalten). Die Fragen und Aufforderungen sind zunächst noch relativ eng formuliert (das betrifft den ersten Abschnitt über Parabeln), um erst einmal eine Grundlage zu schaffen. Bei den Abschnitten über Ellipsen und Hyperbeln sollen dann die Schüler feststellen, wie die Parabeleigenschaften zu übertragen sind und welche Veränderungen vorzunehmen sind. Dies kann in Form eines recht offenen Arbeitsauftrages geschehen. Dass das Ergebnis dieser Aktivitäten vom Umfang und auch vom Inhalt her nicht von vorneherein feststeht, gehört zum Wesen entdeckenden Lernens!

Die angestrebten Beweise können elementargeometrisch geführt werden oder mit Hilfe von Vektorgeometrie oder Analysis. Die zu wählende Methode würde ich in gar keinem Fall vorschreiben! Manche Beweise im Lösungsteil sind vielleicht eleganter als die Schülerlösungen. Ich würde sie aber (wenn überhaupt) erst dann den Schülern zu präsentieren, nachdem diese selbst schon Beweise gefunden haben. Nur nach eigenem Bemühen kann man ja erst die Schönheit anderer Lösungen würdigen. Dem widerspricht nicht, dass einige Arbeitsblätter schon die Lösungen enthalten, die „nur“ noch nachvollzogen werden müssen; dies geschieht dort, wo Schüler kaum eine Chance haben, selber auf die Lösung zu kommen. (Entdeckendes Lernen heißt ja nicht, dass die Schüler die gesamte Mathematik neu erfinden müssten!)

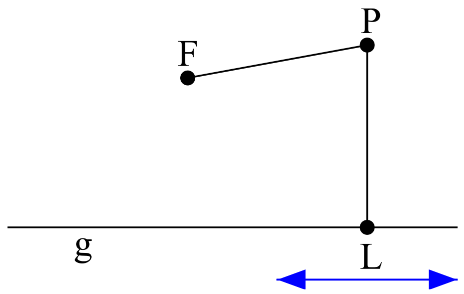
Um das Bedürfnis nach Ordnung zu unterstützen, empfiehlt es sich auf jeden Fall, nach mehreren Aufgaben die Schüler eine Zusammenfassung des Stoffes schreiben zu lassen sowie in regelmäßigen Abständen auch Zusammenfassungen der Zusammenfassungen und mit den Schülern ausführlich darüber zu reden. Lernen ist ja ständiges Zusammenfassen und Umstrukturieren! Hieraus ergibt sich, dass in dieser Unterrichtseinheit die Schüler keineswegs die ganze Zeit am Computer sitzen.

Selbstverständlich gibt es auch schwierige Aufgaben. Ich habe darauf verzichtet, sie eigens zu kennzeichnen; durch einen Blick auf die Lösungen findet der Lehrer heraus, welche Aufgaben für seine Schüler zu anspruchsvoll sind.

1. Parabeln

1.1 Allgemeine Eigenschaften

Die Menge aller Punkte P, die zu einem Punkt F und zu einer Geraden g denselben Abstand haben, heißt Parabel.



1.1.1 Zeichnen Sie die Parabel als Ortskurve (an L ziehen)! Wie verändert sich das Aussehen der Parabel, wenn der Abstand zwischen F und g verändert wird?

Lösung: P liegt auf der Mittelsenkrechten zu PL. Außerdem liegt P auf dem Lot zu g durch L. Die Parabel wird enger (!!), falls der Abstand zwischen F und g verringert wird.

F heißt Brennpunkt, und g heißt Leitgerade.

1.1.2 Der Scheitelpunkt der Parabel heißt S. Wo liegt er, und was lässt sich über die Symmetrie der Parabel sagen?

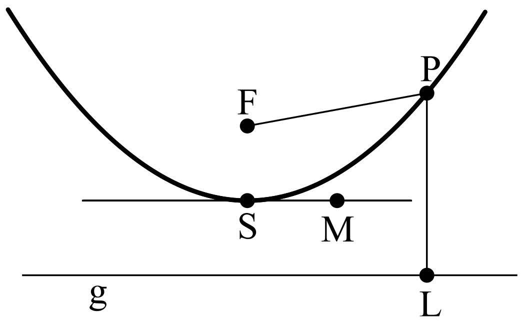
Lösung: S liegt „in der Mitte zwischen“ F und g. Die Gerade durch S und F ist Symmetrieachse der Parabel.

1.1.3 Es sei M die Mitte von F und L. Begründen Sie: FL steht auf MP senkrecht, und MP halbiert den Winkel FPL.

Lösung: Das Dreieck FLP ist (nach Konstruktion) gleichschenklig.

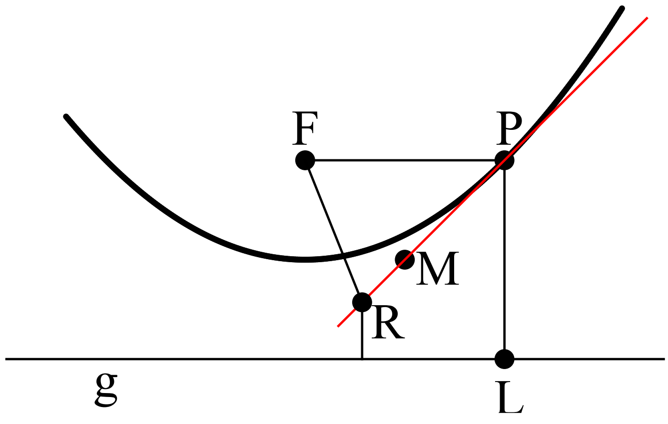
1.1.4 Was passiert mit M, wenn L auf g bewegt wird? Warum ist das so?

Lösung: M bewegt sich auf der Parallelen zu g durch S. Wegen $|FM| = |ML|$ ist die y–Koordinate von F immer das arithmetische Mittel der (konstanten) y–Koordinaten von F und L.



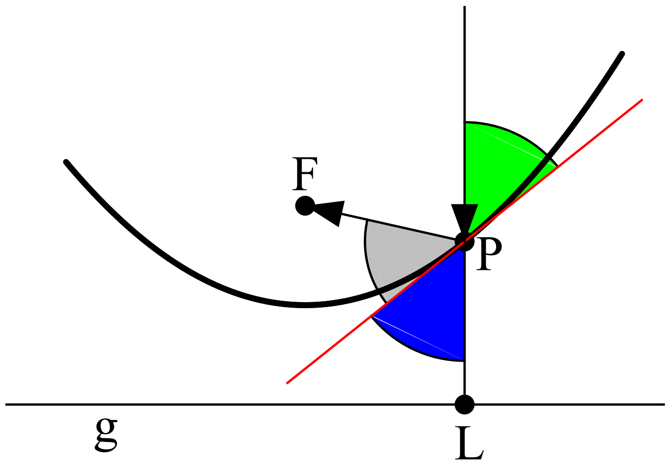
1.1.5 Die Gerade durch M und P ist offensichtlich die Parabeltangente durch P. Warum ist das so?

Lösung: Ein analytischer Beweis liegt auf der Hand; ein elementargeometrischer verläuft etwa folgendermaßen (vgl. das Bild): Da MP die Mittelsenkrechte zu FL ist, gilt für jeden Punkt $R \neq P$ auf MP, dass[2] .. ist; MP liegt also (bis auf den Punkt P) vollständig unterhalb der Parabel.



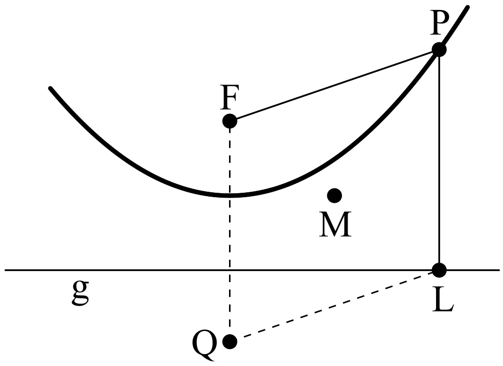
1.1.6: Man kann mit 1.1.3 und 1.1.5 den <u>Parabolspiegel</u> erklären (ein zur Parabelachse paralleler Strahl wird in P an der Parabel(tangente) reflektiert). Wie?

Lösung: Da da Dreieck FPL gleichschenklig ist, ist die Mittelsenkrechte zu FL auch Winkelhalbierende. Alle in der Figur markierten Winkel haben die gleiche Größe. Daher gilt: Jeder zur Parabelachse parallele Strahl hat die Eigenschaft, nach F reflektiert zu werden.



1.1.7: Spiegelt man P an M, so erhält man den Punkt Q. Was passiert mit Q, wenn L auf g bewegt wird? Erklären Sie Ihre Beobachtung! PFQL heißt <u>begleitende Raute</u>.

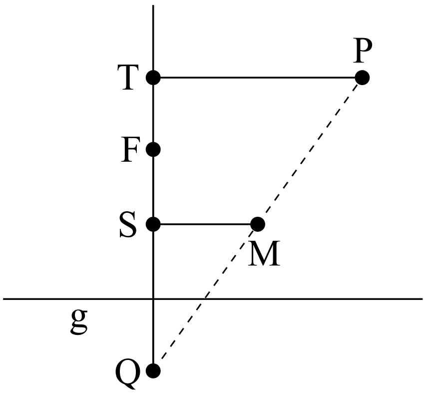
Lösung: Spiegelt man das Dreieck FLP an M, so erhält man LFQ. Da PL senkrecht auf g steht, tut es auch QF. Q liegt demnach auf der Symmetrieachse der Parabel. Die Rauteneigenschaft ergibt sich aus den Eigenschaften einer Punktspiegelung (das Bild einer Strecke ist zur Ausgangsstrecke parallel).



[2] Der Abstand zwischen Gerade g und Punkt P wird mit $.\left|gP\right|.$ bezeichnet.

1.1.8: Betrachten Sie das nebenstehende Bild.

T ist die Projektion von P auf die Parabelachse. Was können Sie über die Lage der Punkte auf der Parabelachse sagen?



Lösung: Aufgrund der Strahlensätze ist der Scheitelpunkt S der Mittelpunkt von T und Q.

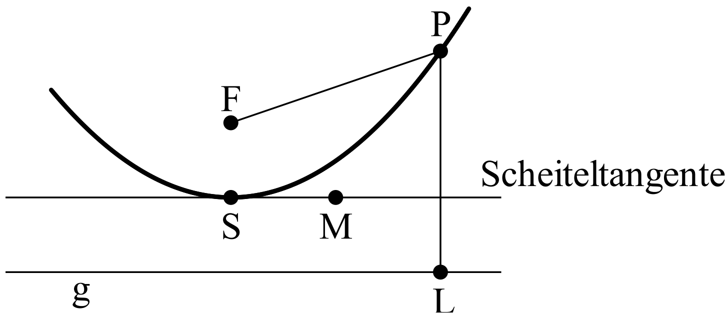
Dies liefert insbesondere die einfache Möglichkeit, die Tangente in P als Gerade QP zu konstruieren.

1.2 Gleichungen

Als Ursprung des Koordinatensystems nehmen wir den Scheitelpunkt S; die Scheiteltangente sei die x–Achse. Ferner sei . $F=\begin{pmatrix}0\\f\end{pmatrix}$..

1.2.1: Falls Sie es noch nicht gemacht haben sollten: Berechnen Sie die Punkte L, M, P. Ermitteln Sie die Gleichung der Parabel.

Lösung: Ein Punkt auf der Leitgeraden ist , und es folgt $M=\frac{F+L}{2}=\begin{pmatrix}t/2\\0\end{pmatrix}$. Die



Mittelsenkrechte zu FL durch M hat die Gleichung .. $X\cdot(F-L)=M\cdot(F-L)$ .., also $-t\cdot x+2\cdot f\cdot y=-\frac{t^2}{2}$. Schneidet man sie mit der Parallelen zur y–Achse durch L, so ergibt sich $P=\begin{pmatrix}t\\t^2/(4\cdot f)\end{pmatrix}$. Die Parabelgleichung lautet demnach $y=\frac{x^2}{4\cdot f}$.

1.2.2: Unter welcher Voraussetzung erhält man die Normalparabel mit der Gleichung ?

Lösung: Die Normalparabel hat den Brennpunkt $F=\begin{pmatrix}0\\1/4\end{pmatrix}$.

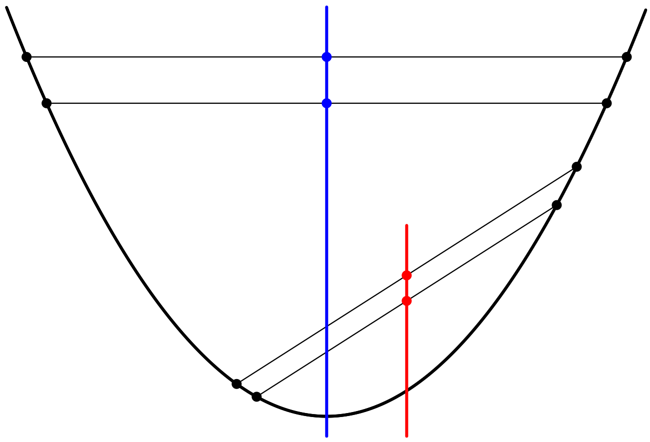
1.2.3: Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an der Stelle t.

Lösung**:** Auch ohne Analysis ergibt sich die Gleichung leicht als $y=\frac{1}{4\cdot f}\cdot\left(2\cdot t\cdot x-t^2\right)$; im Fall der Normalparabel ist $y=2\cdot t\cdot x-t^2$.

1.3 Konstruktionsaufgaben

1.3.0: Eine Parabel liege gezeichnet vor. Man konstruiere die Parabelachse.

Lösung: Da jede Parabel aus der Normalparabel durch Achsenstreckung und Rotation hervorgeht, kann man sich an der Normalparabel orientieren.

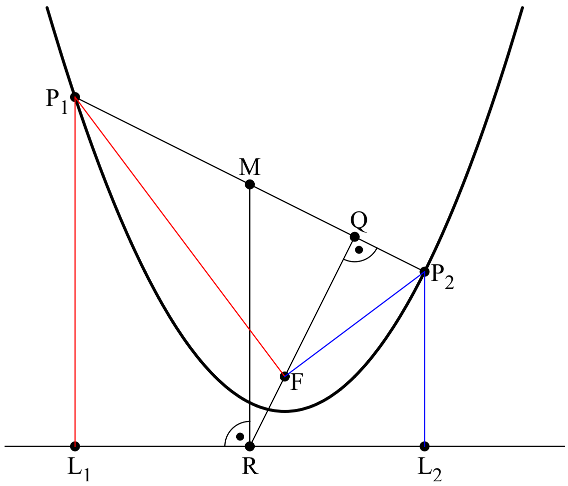


Die Mittelpunkte zweier zueinander paralleler Sehnen liegen auf einer Geraden, die zur Parabelachse parallel ist (in der Skizze rot). Diesen Sachverhalt kann man leicht beweisen:

Eine Gerade mit der Gleichung $y = m \cdot x + n$ schneidet die Normalparabel an den Stellen $\frac{m}{2} \pm \sqrt{\ldots}$; die Mittelpunkte paralleler Sehnen liegen also auf der Geraden zu $x = \frac{m}{2}$.

Zur „Mittelpunktsgeraden“ senkrechte Sehnen haben Mittelpunkte, die auf der Geraden zu $x = 0$, also auf der Parabelachse liegen (in der Skizze blau).

Dies kann man auch auf synthetischem Wege einsehen:



P_1P_2 ist eine Sehne und Q das Lot von F darauf.

QF schneidet die Leitgerade in R. Die Senkrechte zur Leitgeraden durch R schneidet die Sehne in M. Dann ist

$$\begin{aligned} |L_1R|^2 &= |RP_1|^2 - |L_1P_1|^2 = |RP_1|^2 - |FP_1|^2 \\ &= \left(|RQ|^2 + |QP_1|^2\right) - \left(|FQ|^2 + |QP_1|^2\right) \\ &= |RQ|^2 - |FQ|^2 \end{aligned}$$

und analog $|L_1R|^2 = |RQ|^2 - |FQ|^2$.

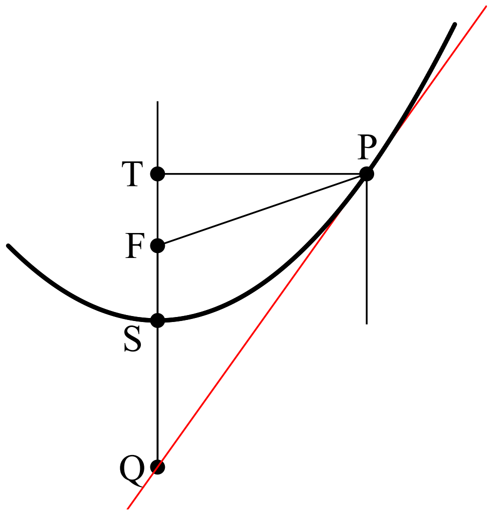
R halbiert also L_1L_2, und daher halbiert M die Sehne.

Jede zu P_1P_2 parallele Sehne führt zum selben Mittelpunkt R der Lotfußpunkte auf der Leitgeraden und damit zum Mittelpunkt der Sehne.

Daher liegen die Mittelpunkte paralleler Sehnen auf der Geraden durch R, die zur Parabelachse parallel ist.

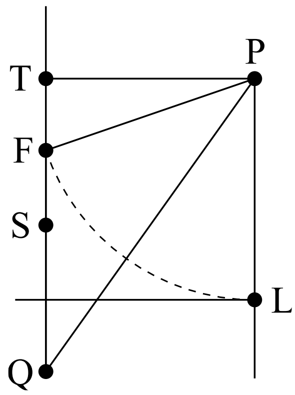
1.3.1: Eine Parabel liege mit ihrer Achse gezeichnet vor. Man konstruiere in einem Parabelpunkt P die Tangente sowie den Brennpunkt F.

Lösung: Man bekommt die Tangente, indem man P auf die Achse senkrecht projiziert (Ergebnis: T) und T am Scheitelpunkt spiegelt (Ergebnis: Q). Die Gerade durch Q und P ist die gesuchte Tangente. Spiegelt man die Parallele zur Parabelachse durch P an der Tangente, so bekommt man eine Gerade, die die Parabelachse in F schneidet.



1.3.2: Gegeben seien der Brennpunkt F der Parabel, die Parabelachse und ein Parabelpunkt P. Wie konstruiert man die Tangente t durch P?

Lösung: Man projiziere P auf die Achse (Resultat: T). Auf der Parallelen zur Parabelachse durch P liegt L mit $|PF| = |PL|$. Damit hat man die Leitgerade, damit S und damit Q und damit die Tangente QP.



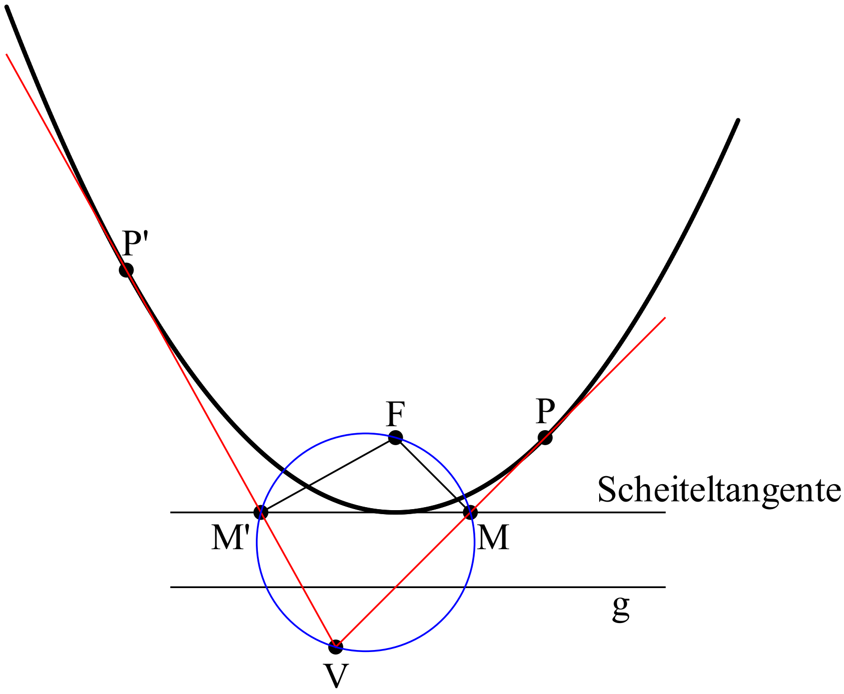
1.3.3: Gegeben sei der Brennpunkt F der Parabel, die Parabelachse und eine Parabeltangente t. Wie konstruiert man den zugehörigen Parabelpunkt P auf t?

Lösung: Spiegelt man F an der Tangente, erhält man L. Das Lot zu g durch L schneidet die Tangente in P.

1.3.4: Gegeben Brennpunkt F und Leitgerade g. Wie konstruiert man die Tangenten durch einen Punkt V außerhalb der Parabel?

Lösung:

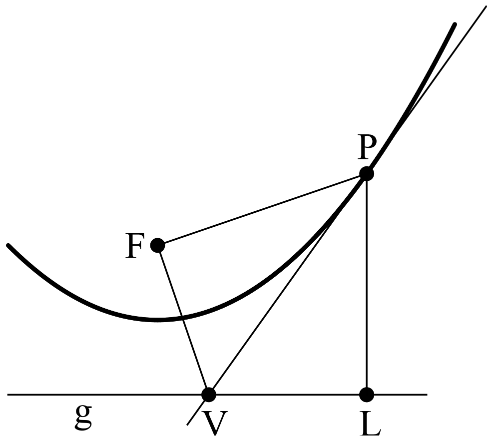
V sei der in Rede stehende Punkt.
Man konstruiere die Scheiteltangente.
FM muss auf der gesuchten Tangente senkrecht stehen.
Daher konstruiere man den Thaleskreis über FV; dieser schneidet die Scheiteltangente in M und M'.
Dann sind VM und VM' die gesuchten Tangenten.



1.4 Weitere Eigenschaften der Tangenten

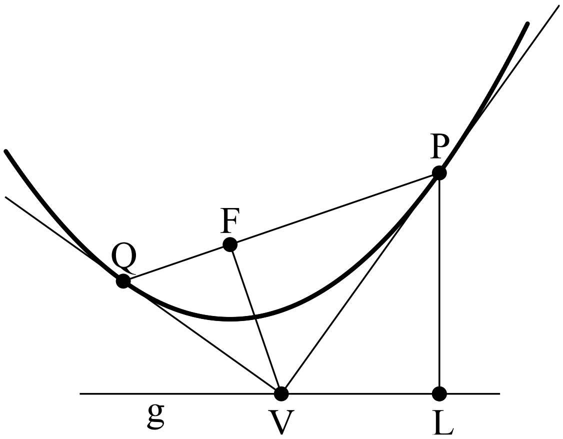
1.4.1: Eine Parabeltangente schneide die Leitgerade in V. Was lässt sich über das Dreieck VPF sagen? Wie kann man das erklären? Wie lässt sich auch dieser Sachverhalt nutzen, um die Parabeltangente zu P zu konstruieren?

Lösung: L liegt auf dem Thaleskreis über VP. Da L und F spiegelbildlich zur Tangente liegen, muss der Thaleskreis auch durch F gehen. Daher steht VF auf FP senkrecht. Zur Konstruktion der Parabeltangente: Die Senkrechte zu PF durch F schneidet die Leitgerade in V. VP ist Tangente.



1.4.2: Verlängert man PF über F hinaus, so gelangt man zum Berührpunkt Q der zweiten Parabeltangente durch V. Warum ist das so?

Lösung: Die Dreiecke VPF und VQF müssen wegen 1.4.1 beide bei F einen rechten Winkel haben. Daher liegt F auf der Strecke PQ.



1.4.3: Beweisen Sie: Zwei Parabeltangenten sind genau dann zueinander rechtwinklig, wenn sie sich auf der Leitgeraden schneiden.

Lösung: Die zu den Stellen a und b gehörigen Parabeltangenten haben die Gleichungen $y=\frac{1}{4\cdot f}\cdot\left(2\cdot a\cdot x-a^2\right)$ und $y=\frac{1}{4\cdot f}\cdot\left(2\cdot b\cdot x-b^2\right)$; sie schneiden sich in $U=\begin{pmatrix}(a+b)/2\\ a\cdot b/(4\cdot f)\end{pmatrix}$.

Beide stehen genau dann aufeinander senkrecht, wenn $\frac{2\cdot a}{4\cdot f}\cdot\frac{2\cdot b}{4\cdot f}=-1$, was zu $\frac{a\cdot b}{4\cdot f}=-f$ äquivalent ist. Die letztere Bedingung bedeutet aber, dass U auf der Leitgeraden liegt.

1.4.4: Beweisen Sie: Zwei Parabeltangenten schneiden sich genau dann auf der Leitgeraden, wenn die Verbindungsgerade ihrer Berührpunkte durch den Brennpunkt geht.

Lösung: Die Gerade durch die beiden Parabelpunkte $\begin{pmatrix}a\\ a^2/(4\cdot f)\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}b\\ b^2/(4\cdot f)\end{pmatrix}$ hat die Gleichung $y=\frac{1}{4\cdot f}\cdot\left((a+b)\cdot x-a\cdot b\right)$; sie geht genau dann durch $F=\begin{pmatrix}0\\ f\end{pmatrix}$, wenn $f=-\frac{a\cdot b}{4\cdot f}$ ist, was zur Orthogonalität der beiden Tangenten äquivalent ist.

1.5 Polaren

In 1.3.4 haben Sie gelernt, wie man durch einen gegebenen Punkt V die Tangenten an eine Parabel konstruiert. Die Gerade durch die Berührpunkte P und P' heißt Polare zu V. Wir bezeichnen sie mit $V^{\#}$.

1.5.1: Konstruieren Sie die Polare $V^{\#}$ zu V. Was passiert, wenn V auf der Leitgeraden liegt? Was passiert, wenn V auf der Parabel liegt? Erklären Sie Ihre Beobachtungen!

Lösung: Die Polare eines Punktes auf der Leitgeraden geht nach **1.4.2** durch den Brennpunkt. Die Polare eines Parabelpunktes ist die dortige Tangente.

Bei den folgenden Rechnungen können Sie annehmen, dass die Parabelgleichung $y=x^2$ lautet.

1.5.2: Ermitteln Sie die Gleichung der Polaren zu $V=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$.

Lösung: Eine mögliche Lösung besteht darin, durch V Geraden zu legen, die Parabeltangenten sind, dann deren Berührpunkte zu ermitteln und durch diese beiden Berührpunkte die gesuchte Gerade zu legen. Dieser Weg ist naheliegend, aber auch mit Arbeitsaufwand verbunden und langweilig. Man lernt nichts dabei.

Bessere Antwort: Die Tangente t_i durch den (unbekannten und auch uninteressanten) Punkt $P_i=\begin{pmatrix}a_i\\ a_i^2\end{pmatrix}$ hat die Gleichung $y=2\cdot a_i\cdot x-a_i^2$. Dann liegt $V=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$ auf t_i, also gilt $v=2\cdot a_i\cdot u-a_i^2$. Schreibt man diese Gleichung als $a_i^2=2\cdot a_i\cdot u-v$, so bedeutet sie, dass die Berührpunkte P_i auf einer Geraden mit der Gleichung $\boxed{y=2\cdot u\cdot x-v}$ liegen. Damit hat man die Polare gefunden.

1.5.2.a Die Polare des Brennpunkts ist die Leitgerade.

1.5.3: Lassen Sie V auf einer Geraden laufen. Was können Sie über die Polaren $V^{\#}$ zu V sagen? Versuchen Sie, Ihre Beobachtung zu beweisen!

Lösung: Wenn V auf einer Geraden g läuft, so drehen sich die Polaren zu V um einen festen Punkt. Begründung: Die Polare zu $V=\begin{pmatrix} u \\ m\cdot u+n \end{pmatrix}$ hat die Gleichung $y=2\cdot u\cdot x-m\cdot u-n$.

Sie geht durch den Punkt $\begin{pmatrix} m/2 \\ -n \end{pmatrix}$.

Sie haben in **1.5.3** gesehen: Wenn V auf einer Geraden $g:\ y=m\cdot x+n$ läuft, so drehen sich die Polaren zu V um einen festen Punkt $\begin{pmatrix} m/2 \\ -n \end{pmatrix}$. Diesen nennen wir den Pol zu g und bezeichnen ihn mit $g^{\#}$.

1.5.4: Beweisen Sie:

- Es sei $V^{\#}$ die Polare zu V. Wenn Sie den Pol zu $V^{\#}$ nach **1.5.3** ausrechnen, erhalten Sie wieder V.
- Es sei $g^{\#}$ der Pol zu g. Wenn Sie die Polare zu $g^{\#}$ nach **1.5.2** ausrechnen, erhalten Sie wieder g.

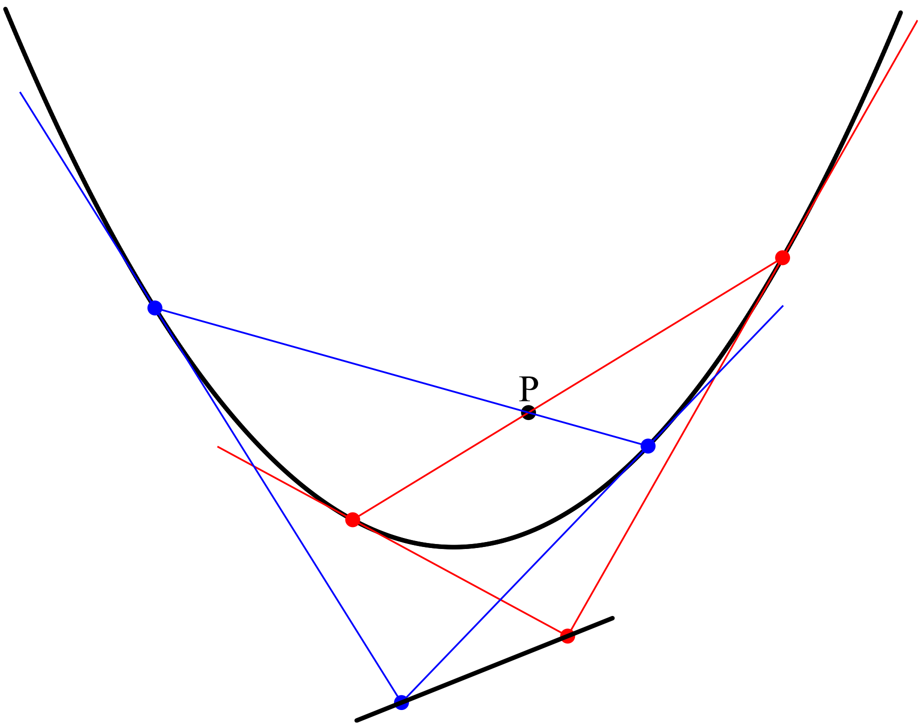
Lösung: $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow y=2\cdot u\cdot x-v$ und $y=m\cdot x+n \rightarrow \begin{pmatrix} m/2 \\ -n \end{pmatrix}$

Wegen **1.5.4** können Sie jedem Punkt V eine Polare $V^{\#}$ zuordnen. Ferner können Sie jeder Geraden g einen Pol $g^{\#}$ zuordnen.

1.5.5: Wie konstruiert man die Polare eines Punktes P, der innerhalb der Parabel liegt?

Lösung:

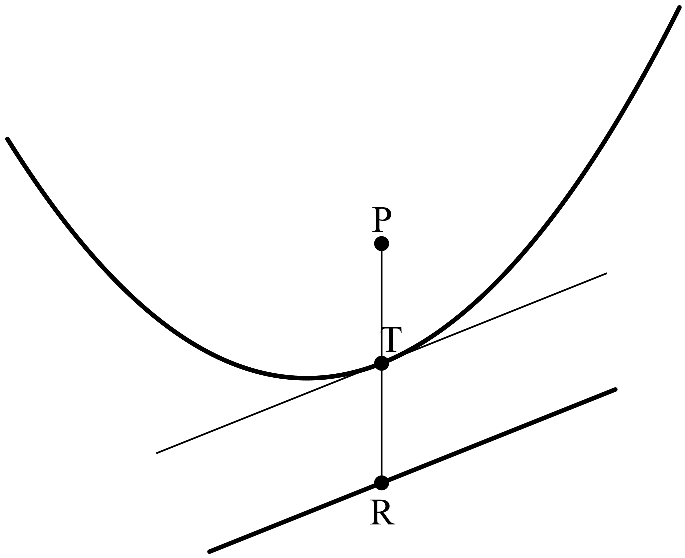
Man konstruiert durch P zwei Sehnen mit den beiden Tangentenpaaren (rot und blau), deren Schnittpunkte auf der gesuchten Polaren liegen.



Die Konstruktion der Polaren zu einem Punkt innerhalb der Parabel lässt sich wesentlich vereinfachen:

1.5.6: Zu jeder Polare $P^{\#}$ gibt es eine dazu parallele Tangente. Betrachten Sie das Bild, und untersuchen Sie es auf Abstandsverhältnisse.

Konstruieren Sie einheitlich zu jedem Punkt P (unabhängig davon, ob P außerhalb, auf oder innerhalb der Parabel liegt) die zugehörige Polare.



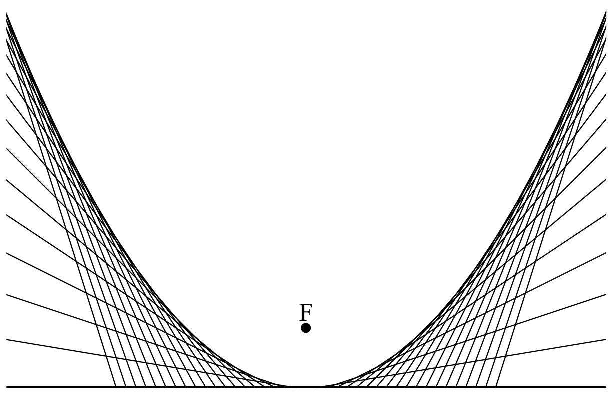
Lösung: Es sei $P=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$; die gesuchte Polare hat die Gleichung $y=2\cdot u\cdot x-v$. Es ist $T=\begin{pmatrix}u\\u^2\end{pmatrix}$, und die zugehörige Tangente hat die Gleichung $y=2\cdot u\cdot x-u^2$. Spiegelt man P an T, bekommt man $R=\begin{pmatrix}u\\2\cdot u^2-v\end{pmatrix}$. Die Parallele zur Tangente durch R hat dann die Gleichung $y=2\cdot u\cdot(x-u)+2\cdot u^2-v=2\cdot u\cdot x-v$, ist also die Polare zu P.

1.6 Hüllkurven

In **1.1.3** haben Sie gesehen, dass FM auf der Parabeltangente senkrecht steht und dass M auf der Scheiteltangente SM liegt.

Wenn nun M die Scheiteltangente durchläuft und immer die Senkrechten zu FM durch M gezeichnet werden, so bekommt man alle Tangenten der Parabel.

Die Parabel erscheint als <u>Hüllkurve</u> ihrer Tangenten.



In der Analysis haben Sie gelernt, wie man die Tangenten berechnet, wenn man die Punkte der Kurve kennt. Hier liegt die inverse Fragestellung nahe: Kann man die Punkte errechnen, wenn man nur die Tangenten der Kurve kennt? D.h. wenn man nicht wüsste, dass bei der obigen Zeichnung die Geraden eine Parabel einhüllen, ja, wenn man gar keine Vermutung hätte, um welche Kurve es sich dabei handelt, könnte man das trotzdem herausbekommen? Ja, man kann!

Dazu sei $F=\begin{pmatrix}0\\f\end{pmatrix}$ der Brennpunkt und $U=\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}$ ein beliebiger Punkt auf der x–Achse (die sich dann hinterher als Scheiteltangente herausstellen wird).

1.6.1: Bestätigen Sie, dass die Senkrechte zu FM durch M die Gleichung $y=\frac{u}{f}\cdot x-\frac{u^2}{f}$ hat.

Wie kommt man jetzt zu dem gesuchten Kurvenpunkt? Er muss ja der Berührpunkt der nun bekannten Gerade g mit der gesuchten Kurve sein. Wie sind Sie in der Analysis vorgegangen? Dort war der Berührpunkt bekannt, und Sie haben die Berührgerade gesucht.

Erinnern Sie sich? Statt der gesuchten Tangente in einem Kurvenpunkt P haben Sie zunächst die Sekante PQ mit einem zweiten beliebigen Kurvenpunkt Q berechnet. Wenn dann der Punkt Q sich dem Punkt P immer mehr annäherte, so näherte sich auch die Sekante immer mehr der Tangente an. Die Tangente in P „war“ dann die Grenzgerade der Sekanten für Q→P; es galt: $t_P=\lim\limits_{Q\to P} PQ$.

Diese Vorgehensweise übernehmen wir hier! Statt des gesuchten Berührpunkts B_g von g berechnen wir zunächst den Schnittpunkt $g\cap h$ mit einer zweiten beliebigen Tangente h. Die Gerade h rührt von einem anderen Punkt $V=\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$ auf der Scheiteltangente her und hat die Gleichung h: $y=\frac{v}{f}\cdot x-\frac{v^2}{f}$.

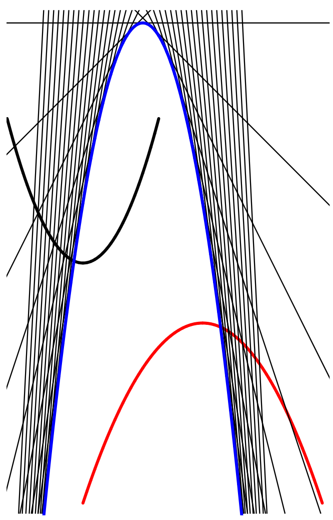
Der Schnittpunkt von g mit h ist $S=\begin{pmatrix} u+v \\ u\cdot v/f \end{pmatrix}$. Wenn nun die Gerade h sich immer mehr der Geraden g annähert, so nähert sich auch der Schnittpunkt $S=\begin{pmatrix} u+v \\ u\cdot v/f \end{pmatrix}$ immer mehr demjenigen Punkt B_g auf g an, der Berührpunkt mit der Parabel ist: $B_g=\lim\limits_{h\to g} g\cap h=\begin{pmatrix} 2\cdot u \\ u^2/f \end{pmatrix}$.

1.7 Hüllkurven von Polaren

Sie haben in **1.5.3** gesehen: Bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden, so drehen sich seine Polaren um einen festen Punkt. Was passiert eigentlich mit den Polaren, wenn sich der Punkt auf einer anderen Kurve bewegt? Die „Polkurve“ wird dann wohl Anlass zu einer Hüllkurve von Polaren, also zu einer „Polarenkurve“ geben.

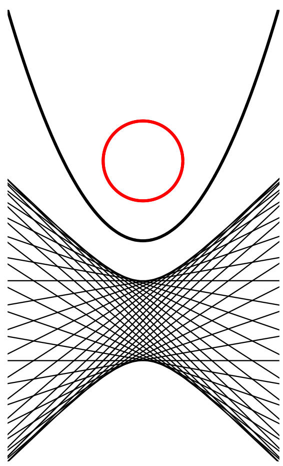
1.7.1: Erzeugen Sie die Polarenkurve einer beliebigen Parabel.

Lösung: Die (schwarze) Ausgangsparabel habe die Gleichung $y=x^2$. Die (rote) Parabel, auf der die Pole liegen, habe die Gleichung $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$. Ein Punkt $U=\begin{pmatrix} u \\ a\cdot u^2+b\cdot u+c \end{pmatrix}$ auf der roten Polparabel hat die Polare mit der Gleichung $y=2\cdot u\cdot x-a\cdot u^2-b\cdot u-c$. Ein anderer Punkt $V=\begin{pmatrix} v \\ \dots \end{pmatrix}$ gibt Anlass zu einer analogen Polarengleichung. Beide Polaren schneiden einander in $\begin{pmatrix} \left(a\cdot(u+v)+b\right)/2 \\ a\cdot u\cdot v-c \end{pmatrix}$. Führt man den Grenzübergang $v\to u$ aus, so gelangt man zum Berührpunkt $\begin{pmatrix} a\cdot u+b/2 \\ a\cdot u^2-c \end{pmatrix}$.



Die blaue Hüllkurve hat also die Gleichung $y=\frac{\left(x-\frac{b}{2}\right)^2}{a}-c$; es handelt sich somit wiederum um eine Parabel.

1.7.2: Betrachten Sie die Polarenkurve eines Kreises, dessen Mittelpunkt auf der Parabelachse liegt.



Lösung: Die Parabel sei die Normalparabel mit $y=x^2$, und ein Punkt des Kreises sei $\begin{pmatrix}0\\h\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix}$. Dann hat die Polare dieses Punktes die Gleichung $y=2\cdot r\cdot\cos\varphi\cdot x-h-r\cdot\sin\varphi$. Die zum Winkel ψ gehörige Polare hat eine analoge Gleichung, und der Schnittpunkt beider Polaren lässt sich berechnen. Führt man für ihn den Grenzübergang $\psi\to\varphi$ aus, so ergibt sich der Hüllkurvenpunkt $\begin{pmatrix}-(\cot\varphi)/2\\-k-r/\sin\varphi\end{pmatrix}$;

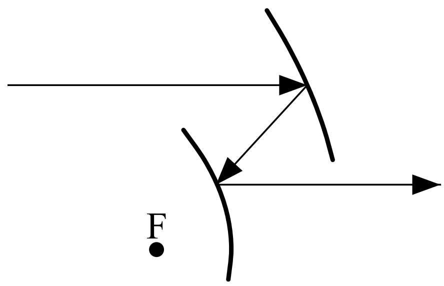
er liegt auf einer Kurve mit der Gleichung $\left(\frac{y+k}{r}\right)^2-(2\cdot x)^2=1$, also auf einer Hyperbel.

<u>Achtung</u>: Nimmt man als Polkurve einen Kreis, der nicht auf der Parabelachse liegt, so ergibt sich eine gedrehte Hyperbel, die mit den Mitteln der Schulmathematik nicht mehr angemessen untersucht werden kann.

1.8 Eine Anwendung

F sei ein fester Punkt. Ein beliebiger Strahl soll erst in Richtung F reflektiert werden; vor Erreichen von F soll er abermals so reflektiert werden, dass er danach wieder parallel zum Anfangsstrahl verläuft. Welche Kurven sind das? Wozu kann man die gesamte Anordnung verwenden?

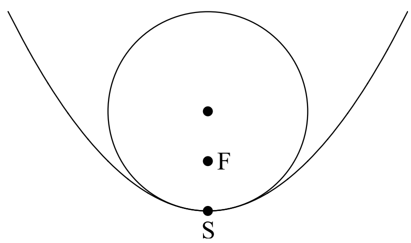
Lösung: Es handelt sich um Parabeln mit dem Brennpunkt F und zum Anfangsstrahl senkrechten Leitgeraden. Ein Bündel paralleler Strahlen kann so verengt bzw. aufgeweitet werden.



1.9 Der Scheitelkrümmungskreis der Normalparabel

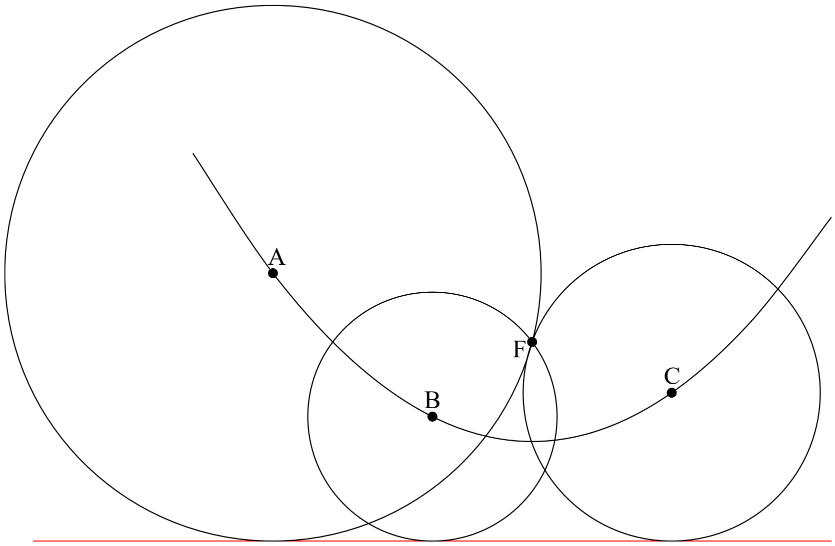
Der Radius des **Krümmungskreises** zur Kurve mit dem allgemeinen Punkt $P(t)$ ist $\rho(t)=\frac{P'^2}{P'^{\perp}\cdot P''}\cdot|P'|$.

Für $P(t)=\begin{pmatrix}t\\t^2\end{pmatrix}$ bekommt man $\rho(0)=\frac{1}{2}$.



1.10 Parabeln durch drei Punkte: Problematik

Es reicht nicht, eine Parabel durch drei Kurvenpunkte A, B und C festzulegen; man benötigt auch den Brennpunkt F, der allerdings nicht beliebig wählbar ist, denn der Kreis um A durch F und der Kreis um B durch F und der Kreis um C durch F müssen die (rote) Leitgerade berühren. Drei beliebige Kreise haben jedoch i.a. keine gemeinsame Tangente.

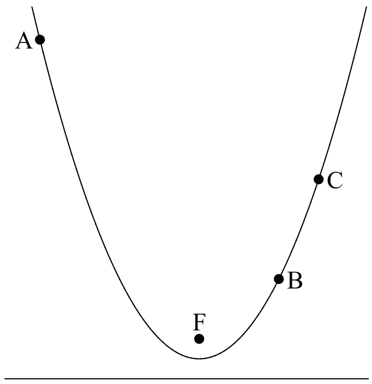


1.11 Parabeln aus 3 Punkten und dem zugehörigen Brennpunkt

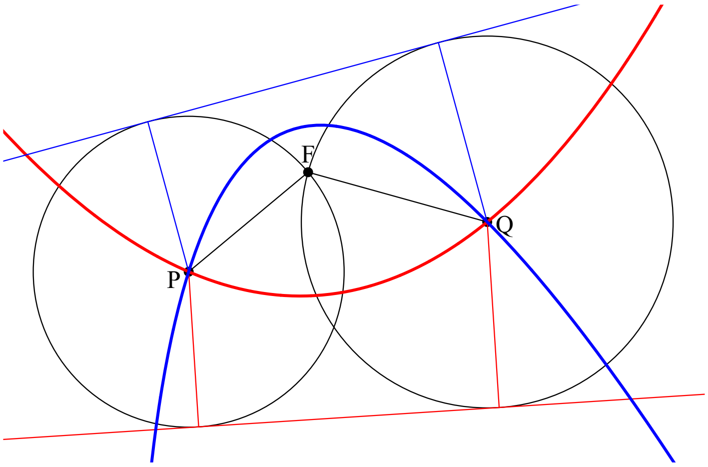
Wie findet man die Leitgerade g?

Lösung:

Man kann so vorgehen wie im nächsten Abschnitt oder wie folgt: Wegen $|FA| = |gA|$, $|FB| = |gB|$, $|FC| = |gC|$ hat die Leitgerade in baryzentrischen Geradenkoordinaten die Form $\left[|FA| : |FB| : |FC|\right]$; auf ihr liegen die Punkte $\left(-|FB| : |FA| : 0\right)$ und $\left(0 : -|FC| : |FB|\right)$. Diese Verfahren sind jedoch nur erfolgreich, wenn F ein passender Brennpunkt ist.



1.12 Parabeln aus 2 Punkten und dem Brennpunkt



Lösung:

Die Leitgeraden sind die Tangenten an die Kreise um P bzw. Q und F. Naturgemäß gibt es zwei Lösungen.

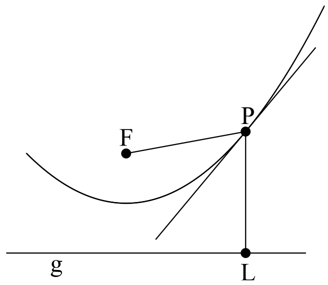
1.13 Parabel aus 2 Tangenten und dem Brennpunkt

Lösung:

Jede Tangente ist Mittelsenkrechte von F und einem Punkt L auf der Leitgeraden.

Zwei Tangenten liefern demnach zwei Punkte auf der Leitgeraden und damit diese selbst.

Hier ist die Lösung eindeutig.



2. Ellipsen

Bei einer Parabel hat man Gleichabständigkeit zu einem Punkt (Brennpunkt) und einer Geraden (Leitgerade). Biegt man die Gerade zu einem Kreis, so gibt es zwei Möglichkeiten: Man kann die Gerade vom Brennpunkt weg biegen, so dass der Brennpunkt außerhalb des Kreises liegt, oder den Kreis zum Brennpunkt hin biegen, so dass der Brennpunkt innerhalb des Kreises liegt. Im ersten Fall bekommt man statt der Parabel eine Hyperbel, im zweiten Fall eine Ellipse.

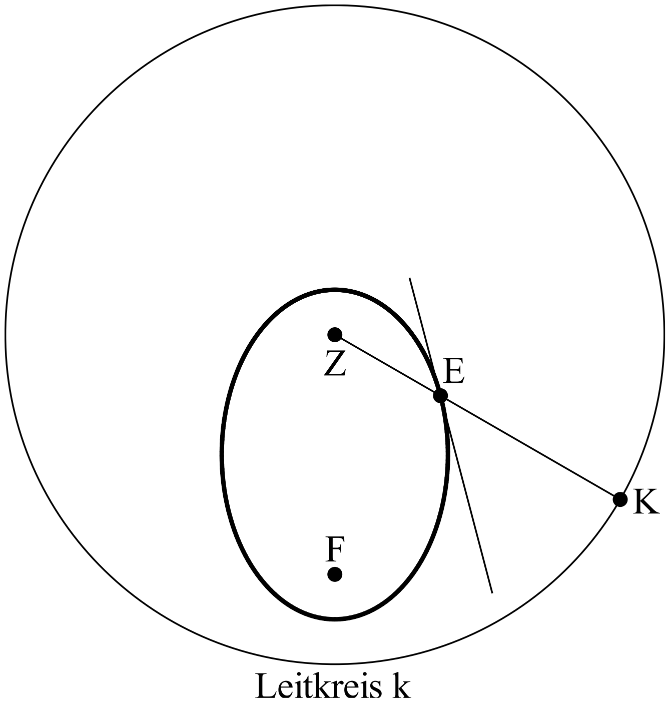
2.1 Allgemeine Eigenschaften

Gegeben seien ein Kreis k mit Mittelpunkt Z und Radius r sowie ein Punkt F innerhalb des Kreises.

Die Menge aller Punkte E, die zum Kreis k und zum Punkt F denselben Abstand haben, heißt Ellipse.

Wie üblich ist der Abstand $|kE|$ als kürzeste Entfernung $|KE|$ für Punkte K auf dem Kreis k definiert.

F heißt Brennpunkt, und k heißt Leitkreis.



2.1.1: Konstruieren Sie die Ellipse als Ortskurve! Wie verändert sich das Aussehen der Ellipse, wenn der Abstand zwischen F und k verändert wird? Was lässt sich über Symmetrie und die beiden Extrempunkte sagen?

Lösung: K durchlaufe den Kreis k. E liegt auf der Mittelsenkrechten zu FK. Außerdem liegt E auf ZK. Die Ellipse wird kreisförmiger, falls der Abstand zwischen F und Z verringert wird. Ist F = Z, so erhält man einen Kreis.

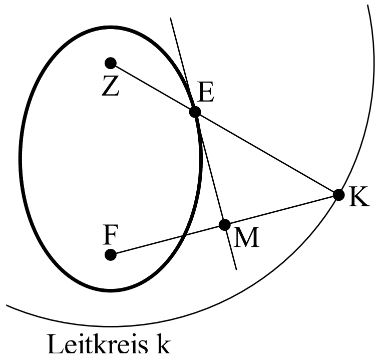
Die Ellipse hat eine Symmetrieachse, die durch F und Z verläuft. Wegen $|kE| = |KE| = r - |ZE|$ lässt sich die die Ellipse definierende Gleichung $|FE| = |kE|$ umschreiben zu $\boxed{|EF| + |EZ| = r}$.

Auch Z ist also ein Brennpunkt. Aufgrund der symmetrischen Gestalt der eingekastelten Gleichung ist auch die Mittelsenkrechte zu F und Z Symmetrieachse.

Mit $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $F = \begin{pmatrix} 0 \\ -f \end{pmatrix}$ und $K_\varphi = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ lässt sich der „nördliche" Scheitelpunkt N wegen $|FN| = |kN| = |K_{90°}N|$ beschreiben als $N = \frac{F + K_{90°}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} r-f \\ 0 \end{pmatrix}$ und der „südliche" Scheitelpunkt S wegen $|FS| = |kS| = |K_{270°}S|$ als $S = \frac{F + K_{270°}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -r-f \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.1.2: Die Ellipse verläuft vollständig innerhalb des Leitkreises. Warum?

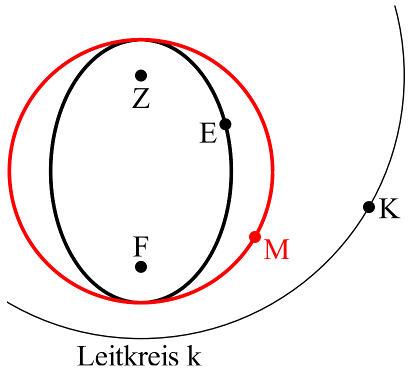
Lösung: Wäre E außerhalb des Leitkreises, so wäre $|EZ|$ größer als r; dann müsste aber $|EF|$ negativ sein.



2.1.3: Es sei M die Mitte von F und K. Begründen Sie: FK steht auf ME senkrecht, und ME halbiert den Winkel FEK.

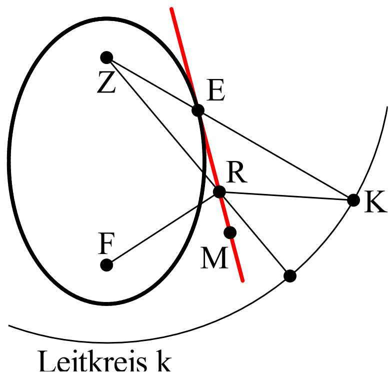
Das Dreieck FKE ist (nach Konstruktion) gleichschenklig.

2.1.4: Es sei M die Mitte von F und K. Verifizieren Sie: Wenn K auf dem Leitkreis k bewegt wird, bewegt sich M auf einem anderen Kreis. Dieser zweite Kreis heißt (Haupt-)<u>Scheitelkreis</u>. Begründen Sie Ihre Beobachtung, indem Sie die Koordinaten von M berechnen. Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius des Scheitelkreises.



Lösung: Mit $Z=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, K=r\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix}0\\-f\end{pmatrix}$ ist

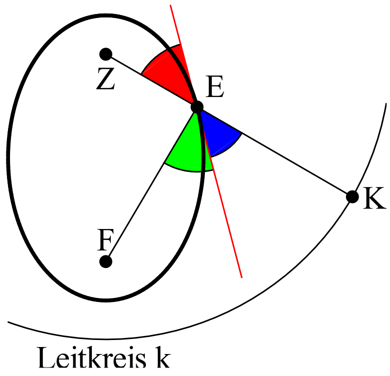
$M=\frac{F+K}{2}=\begin{pmatrix}-f/2\\0\end{pmatrix}+\frac{r}{2}\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix}$. Der Scheitelkreis hat den Mittelpunkt $\frac{Z+F}{2}$ und den Radius r/2. Die Scheitelpunkte der Ellipse liegen auf ihm.



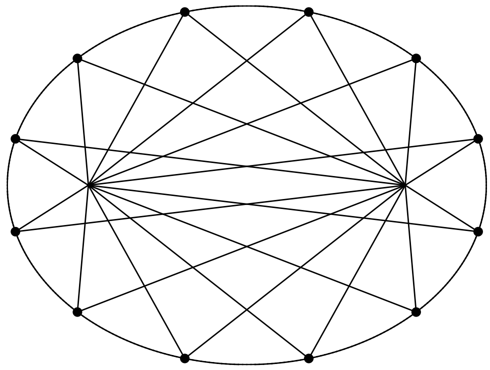
2.1.5: Übertragen Sie **1.1.5** auf die Ellipse!

Lösung: Die Gerade durch M und E ist Ellipsentangente aus folgendem Grund:
Da ME die Mittelsenkrechte zu KF ist, gilt für jeden Punkt $R\neq E$ auf ME, dass $|FR|=|KR|\neq|kR|$ ist;
MP hat also mit der Ellipse nur den Punkt E gemeinsam.

2.1.6: Übertragen Sie **1.1.6** auf die Ellipse!



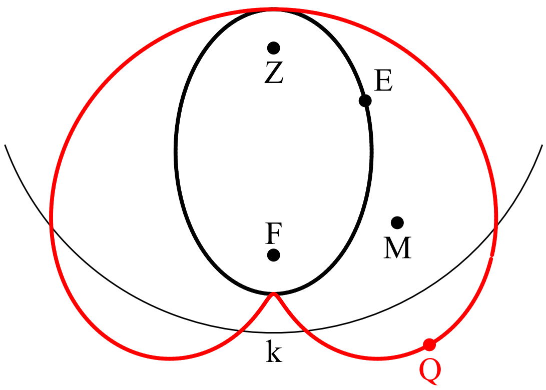
Lösung: Jeder von F ausgehende Strahl wird an der Ellipse(ntangente) so reflektiert, dass er anschließend durch Z geht, denn der grüne Winkel und der blaue Winkel haben gleiche Größe, weil FKE nach Konstruktion gleichschenklig ist, und der blaue und der rote Winkel sind Scheitelwinkel.



Anwendungen sind Flüstergalerien.

Geht ein Strahl nicht von einem Brennpunkt aus, so wird er auch nicht in den anderen Brennpunkt reflektiert. Unterhalten sich zwei Personen in den Brennpunkten einer Flüstergalerie, so werden sie nicht durch andere Personen gestört.

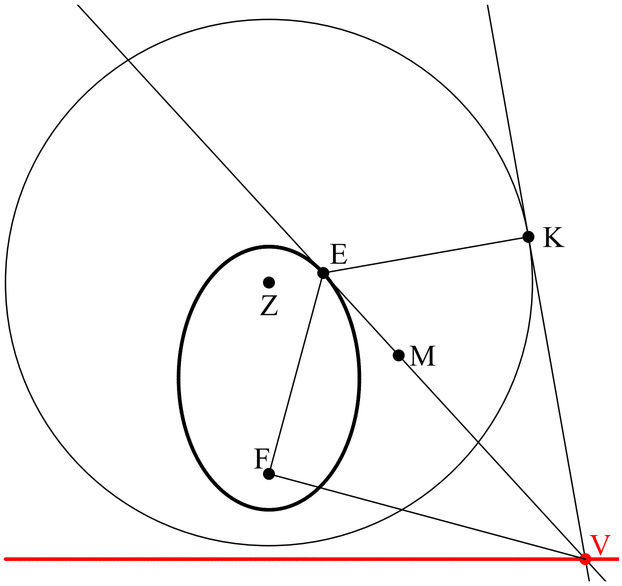
2.1.7: Spiegelt man E an M, so erhält man den Punkt Q. Verifizieren Sie: Wenn K auf dem Leitkreis bewegt wird, durchläuft Q weder eine Gerade noch einen Kreis.



Lösung: Es ergibt sich das nebenstehende Bild. Somit lässt sich **1.1.7** nicht direkt analogisieren.

2.1.7a: Die Ellipsentangente durch E und die Leitkreistangente durch K schneiden einander in V. Begründen Sie: Wenn K den Leitkreis durchläuft, durchläuft V eine Gerade. Diese Gerade heißt <u>Leitgerade</u> der Ellipse; sie wird hier mit g abgekürzt. EFVK heißt <u>begleitender Drachen</u>; er ist bei K und bei F rechtwinklig.

Lösung: EM ist Symmetrieachse von EFVK; insbesondere hat man bei F einen rechten Winkel. Es sei $K = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ und $F = \begin{pmatrix} 0 \\ -f \end{pmatrix}$. Die Ellipsentangente hat als Mittelsenkrechte zu F und K die Gleichung $X \cdot (K - F) = \frac{K + F}{2} \cdot (K - F) = \frac{K^2 - F^2}{2}$, und die Kreistangente hat die Gleichung $X \cdot K = K^2$.



Subtrahiert man beide Gleichungen voneinander, so folgt $X \cdot F = \frac{K^2 + F^2}{2}$ und damit

$\boxed{g:\ y = -\frac{r^2 + f^2}{2 \cdot f}}$.

2.2 Gleichungen

Da man hier anders vorgeht als bei Parabeln, ist die interne Nummerierung von **2.2** nicht analog zu der internen Nummerierung von **1.2**.

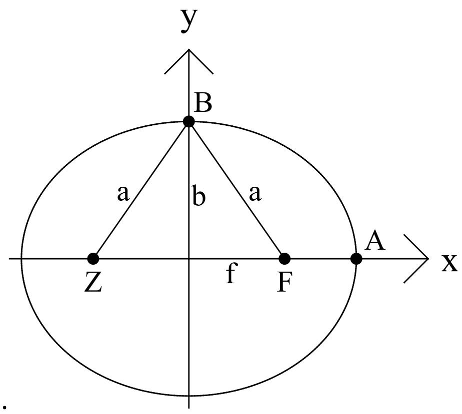
Üblicherweise platziert man die beiden Brennpunkte auf der Rechtsachse. Sie wurden im letzten Kapitel nur deswegen auf der Hochachse platziert, um die Analogie zur Parabel offensichtlicher zu gestalten.

Nehmen Sie als Ursprung des Koordinatensystems die Mitte zwischen Z und F. Es sei $F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$, also $Z = \begin{pmatrix} -f \\ 0 \end{pmatrix} = -F$. Der Leitkreis habe den Radius $r = 2 \cdot a$.

Erster Weg (ein zweiter Weg wird im Anhang dargestellt): Es gilt für den „Ostpol“ $A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ wegen $r = |AF| + |AZ| = (a - f) + (f + a) = 2 \cdot a$, dass $\boxed{A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r/2 \\ 0 \end{pmatrix}}$ ist.

Wegen $r=|BZ|+|BF|=2\cdot|BF|$ ist $|BF|=a$ und $\boxed{b^2=a^2-f^2}$,

also $\boxed{B=\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\sqrt{a^2-f^2}\end{pmatrix}}$.



Es ist für den ersten Weg von Nutzen, den Abstand $|EF|$ für einen Ellipsenpunkt $E=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ zu berechnen. Der Trick besteht in einer cleveren Verwendung der 3. binomischen Formel.

Die Ellipsenpunkte E sind durch die Beziehung $|EF|+|EZ|=r=2\cdot a$ charakterisiert.

Ferner ist $|EZ|^2=(x+f)^2+y^2$ und $|EF|^2=(x-f)^2+y^2$, also $|EZ|^2-|EF|^2=4\cdot x\cdot f$.

Mithin ist $|EZ|-|EF|=\frac{|EZ|^2-|EF|^2}{|EZ|+|EF|}=\frac{4\cdot x\cdot f}{2\cdot a}=\frac{2\cdot x\cdot f}{a}$, was zusammen mit $|EZ|+|EF|=2\cdot a$ ergibt, dass

$\boxed{|EF|=a-\frac{x\cdot f}{a}}$ und $\boxed{|EZ|=a+\frac{x\cdot f}{a}}$ ist.

Hieraus folgt die Ellipsengleichung $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$, indem man die Gleichungen $|EF|^2=(x-f)^2+y^2$ und $|EF|^2=\left(a-\frac{x\cdot f}{a}\right)^2$ voneinander abzieht.

2.2.4: Sie können einen beliebigen Ellipsenpunkt E auch schreiben als $E=\begin{pmatrix}a\cdot\cos t\\b\cdot\sin t\end{pmatrix}$.

Dass wir die Ellipse durch 2 Gleichungen beschrieben haben, ist kein reiner Luxus. Zur Beschreibung der Ellipsenpunkte nimmt man **2.2.4**, und wenn man testen will, ob irgendein Punkt auf der Ellipse liegt oder nicht, nimmt man **2.2.3**. Insbesondere erkennt man aus **2.2.4**, dass Ellipsen gestauchte Kreise sind.

2.2.5: Die Tangente zu dem Ellipsenpunkt $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ hat die Gleichung $\frac{x\cdot x_0}{a^2}+\frac{y\cdot y_0}{b^2}=1$.

Lösung: Man leitet den Ellipsenterm $f(x)=\pm\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2-x^2}$ ab; dies führt auf

$f'(x)=\pm\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-2\cdot x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$. Also lautet die Tangentengleichung

$y=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}\cdot(x-x_0)+y_0$, woraus $b^2\cdot x\cdot x_0+a^2\cdot y\cdot y_0=\underbrace{b^2\cdot x_0^2+a^2\cdot y_0^2}_{a^2\cdot b^2}$ folgt.

2.2.6: Zeigen Sie, dass die Leitgerade die Gleichung $\boxed{g:\ x=\frac{a^2}{f}}$ hat.

Lösung: Nach **2.1.7.a** besteht Leitgerade aus den Schnittpunkten der Ellipsentangenten mit den zugehörigen Kreistangenten.

Der Leitkreis ist der Kreis um Z mit dem Radius $r=2\cdot a$. Dann ist

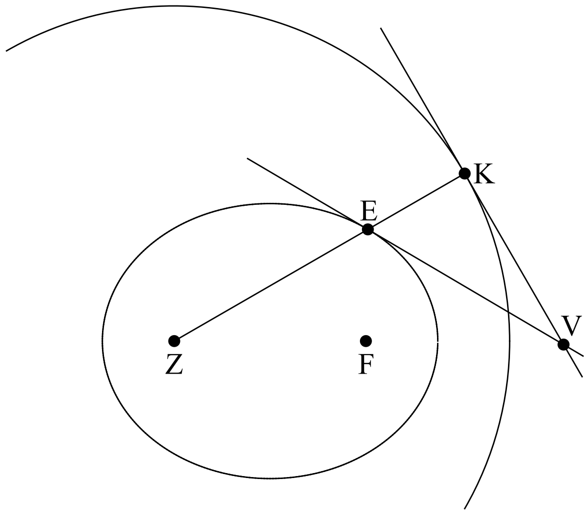
$K=Z+2\cdot a\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$ mit der

Tangente

$X\cdot(K-Z)=K\cdot(K-Z)=K^2+K\cdot F$.

Die Tangente in E ist die Mittelsenkrechte zu F und K, hat also die Gleichung

$X\cdot(K-F)=\frac{K^2-F^2}{2}$.



Subtrahiert man beide Gleichungen, bekommt man

$2\cdot X\cdot F=\frac{K^2+2\cdot K\cdot F+F^2}{2}=\frac{(K-Z)^2}{2}=\frac{4\cdot a^2}{2}$ und damit $x=\frac{a^2}{f}$.

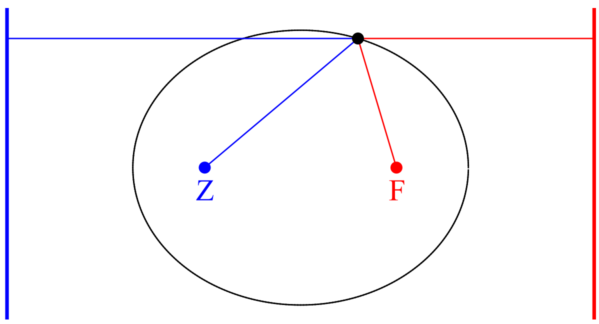
2.2.7: Schreibt man $|EF|=a-\frac{x\cdot f}{a}=\frac{f}{a}\cdot\left(\frac{a^2}{f}-x\right)=\frac{f}{a}\cdot|gE|$, so erkennt man: Für jeden Ellipsenpunkt E gilt

$|FE|=\varepsilon\cdot|gE|$ mit $\varepsilon=\frac{f}{a}$. Der Faktor ε heißt <u>numerische Exzentrizität</u>.

Bei der Parabel ist $\varepsilon=1$.

Natürlich gehören zur Ellipse *zwei* Leitgeraden

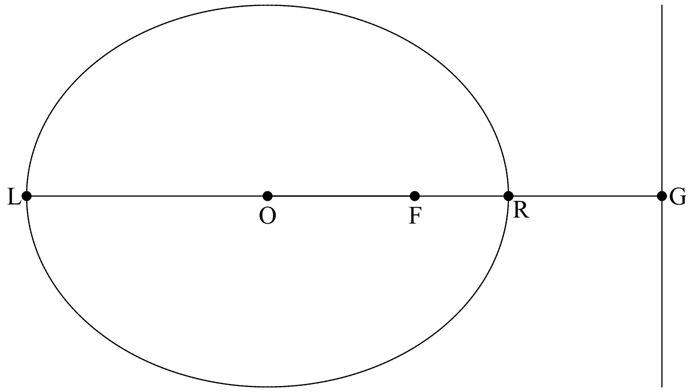
mit den Gleichungen $x=\pm\frac{a^2}{f}$.



2.2.7_a: Wie konstruiert man die Leitgeraden, wenn die Ellipse und ihre Brennpunkte gegeben sind?

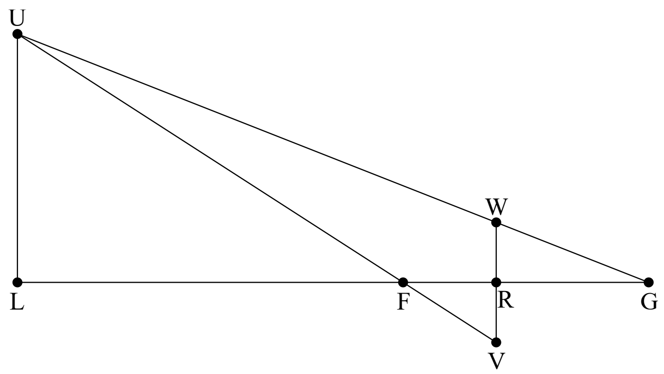
Mit $L=\begin{pmatrix}-a\\0\end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}f\\0\end{pmatrix}$, $R=\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$, $G=\begin{pmatrix}a^2/f\\0\end{pmatrix}$ gilt:

Die Strecke LR wird von F im Verhältnis $\frac{|LF|}{|FR|}=\frac{a+f}{a-f}$ geteilt. Der zugehörige äußere Teilungspunkt G habe von O den Abstand g; für ihn muss dann $\frac{a+f}{a-f}=\frac{|LF|}{|FR|}=\frac{|LG|}{|GR|}=\frac{a+g}{g-a}$ sein, was auf $\boxed{g=\frac{a^2}{f}}$ führt.



2.2.7_b: Wie konstruiert man den äußeren Teilungspunkt, wenn der innere gegeben ist?

Man wähle U auf der Lotgerade durch L beliebig und verbinde U mit F. Der Schnittpunkt mit der Lotgeraden durch R ist V. Man spiegele V an R mit dem Ergebnis W. UW schneidet LR in G.



Begründung: $\frac{|LF|}{|FR|}=\frac{|LU|}{|RV|}=\frac{|LU|}{|RW|}=\frac{|LG|}{|RG|}$.

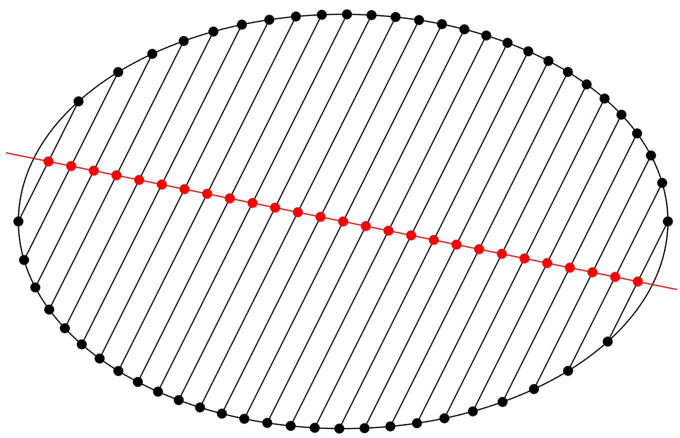
2.3 Konstruktionsaufgaben

Schneidet man die Ellipse mit $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ mit der Geraden mit $y=m\cdot x+n$, so bekommt man die Schnittstellen $x_{1,2}=\frac{-a^2\cdot m\cdot n\pm a\cdot b\cdot\sqrt{a^2\cdot m^2+b^2-n^2}}{a^2\cdot m^2+b^2}$; der Mittelpunkt beider Schnittpunkte ist

$$\frac{n}{a^2\cdot m^2+b^2}\cdot\begin{pmatrix}-a^2\cdot m\\ b^2\end{pmatrix}.$$

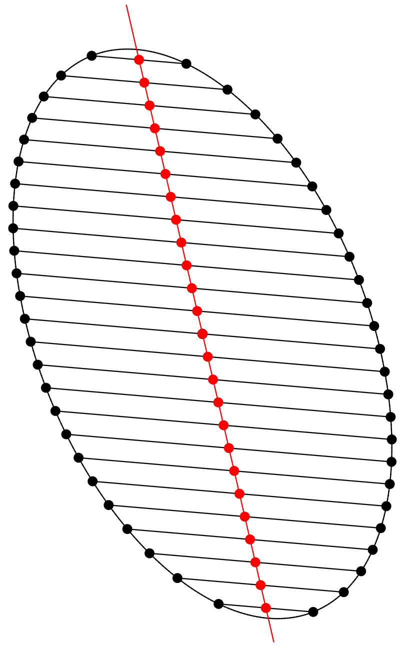
Für verschiedene Werte von n liegen diese Mittelpunkte auf der Ursprungsgeraden mit $y=-\frac{b^2}{a^2\cdot m}\cdot x$.

Die Richtungen $m\neq 0$ und $-\frac{b^2}{a^2\cdot m}$ heißen zueinander <u>konjugiert</u>; dieser Begriff verallgemeinert das Senkrechtstehen beim Kreis.



Dies kann man auch ohne Rechnung einsehen, denn eine Ellipse ist ein gestauchter Kreis. Für Kreise ist es unmittelbar evident, dass die Mittelpunkte zueinander paralleler Sehnen auf einer dazu senkrechten Mittelpunktssehne liegen. Bei Stauchungen bleiben Parallelität und

Mittelpunktseigenschaft erhalten. Die Steigungen beim Kreis seien μ_1 und μ_2 mit $\mu_1 \cdot \mu_2 = -1$. Bei der Stauchung in y-Richtung um den Faktor $\frac{b}{a}$ wird aus μ_1 die Steigung $m_1 = \frac{b}{a} \cdot \mu_1$ und aus μ_2 wird $m_2 = \frac{b}{a} \cdot \mu_2$. Damit ist $m_1 \cdot m_2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 = -\frac{b^2}{a^2}$.

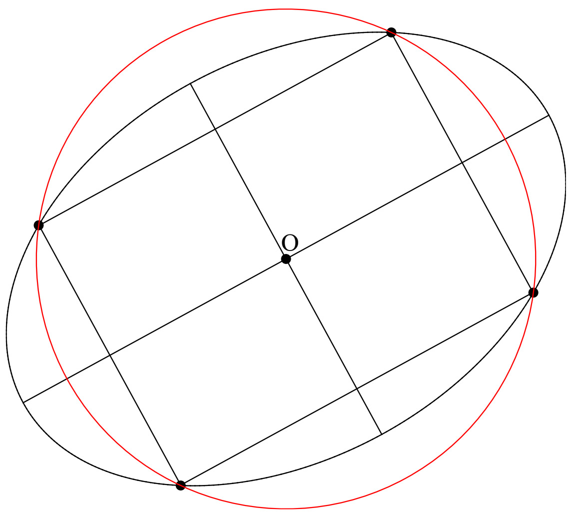


Warnung: Die zu konjugierten Durchmessern gehörige Gleichung $m_1 \cdot m_2 = -\frac{b^2}{a^2}$ sagt aus, dass die eine Steigung positiv und die andere negativ sein muss. Man kann die Ellipse so drehen, dass beide Steigungen gleiches Vorzeichen haben (Graphik rechts), so dass die obige Gleichung nicht gelten kann.

Die Gleichung $m_1 \cdot m_2 = -\frac{b^2}{a^2}$ ist daher an die Achse ZF gebunden.

2.3.0: Eine Ellipse liege gezeichnet vor. Konstruieren Sie die Achsen.

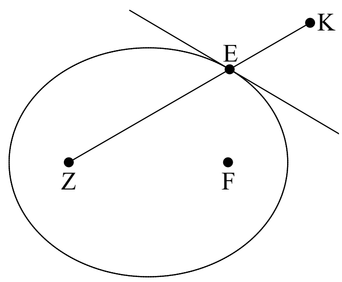
Lösung: Die Mittelpunkte zweier zueinander paralleler Sehnen liegen auf einer Geraden, die durch den „Mittelpunkt“ O der Ellipse geht. Auf diese Weise lässt sich O konstruieren. Nun zeichne man einen Kreis um O, der die Ellipse in 4 Punkten schneidet; man bekommt so ein Rechteck. Die Parallelen zu den Rechtecksseiten durch O bilden die Achsen der Ellipsen.



2.3.1–4: Die Konstruktionsaufgaben **1.3.1–4** lassen sich von der Parabel auf die Ellipse übertragen.

2.3.1: Gegeben seien Z, F, und E.
Man konstruiere die Ellipsentangente.

Lösung: K liegt auf der Verlängerung von ZE mit $d(E,F)=d(E,K)$. Die Mittelsenkrechte zu KF ist die gesuchte Tangente.

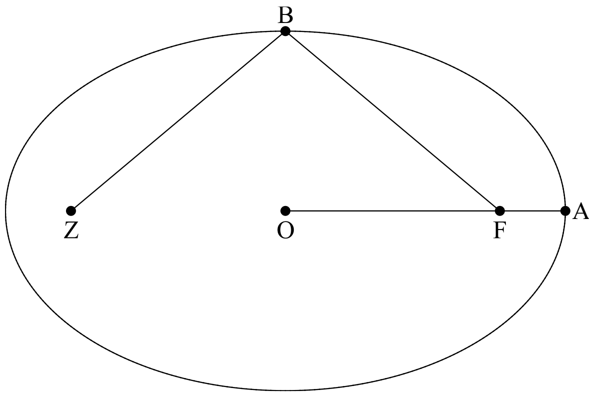


2.3.2: Gegeben seien Z, F und eine Ellipsentangente t. Man konstruiere den Ellipsenpunkt.

Lösung: Spiegelt man F an t, erhält man K. E ist der Schnittpunkt von t mit ZK.

2.3.3: Eine Ellipse liege mit einer Achse gezeichnet vor. Man konstruiere die Brennpunkte.

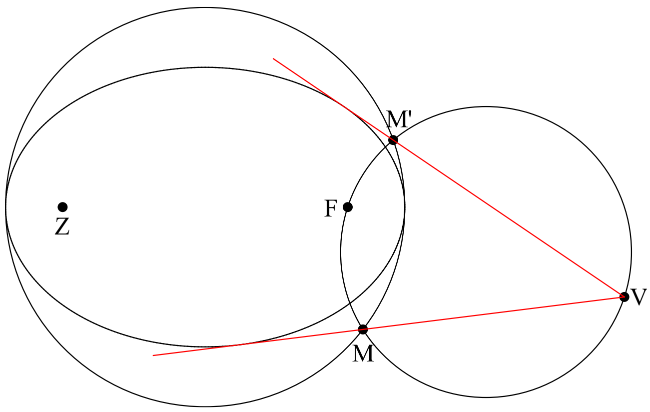
Lösung: Nach **2.2.1** ist $d(O, A)=d(B, F)$. Man schlage einen Kreis um B mit dem Radius $d(O, A)$.



2.3.4: Eine Ellipse liege mit einer Achse gezeichnet vor. Man konstruiere die Tangenten von einem Punkt V außerhalb der Ellipse.

Lösung:

Schneidet eine Ellipsentangente den Scheitelkreis in M, so steht FM auf der Tangente senkrecht. Man konstruiere also zunächst F. Dann schlage man den Thaleskreis über FV. Dieser schneidet den Scheitelkreis in M und M'. Die Geraden VM und VM' sind dann die gesuchten Tangenten.



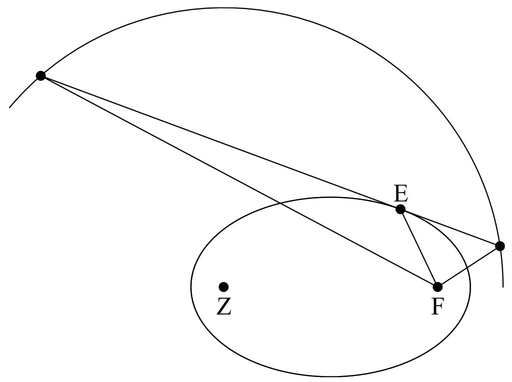
2.4 Weitere Eigenschaften der Tangenten

Auch die weiteren Eigenschaften der Tangenten bei Parabeln (**1.4**) fordern zu einer Analogisierung heraus. Das kann schiefgehen:

2.4.1: Analogisieren Sie **1.4.1**.

Lösung:

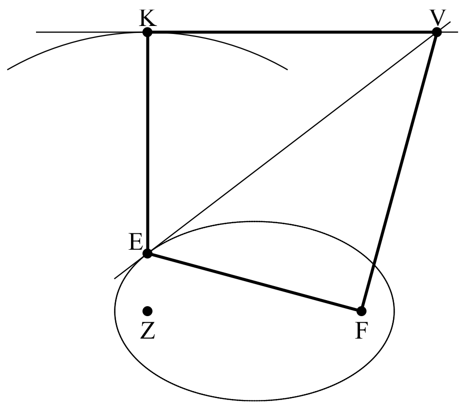
Hierbei ist sicher die Leitgerade der Parabel durch den Leitkreis der Ellipse zu ersetzen. Schneidet nun eine Ellipsentangente den Leitkreis, so sind die entstehenden Dreiecke i.a. <u>nicht</u> rechtwinklig!



Was tun? Nun, vielleicht ist der Leitkreis doch nicht das geeignete Objekt? Drehen wir den Spieß herum!

2.4.1a: Konstruieren Sie den geometrischen Ort aller Punkte V auf Ellipsentangenten, so dass EF auf FV senkrecht steht, und begründen Sie, dass Sie damit die Leitgerade erhalten. Wie kann man diesen Sachverhalt nutzen, um die Ellipsentangente zu E zu konstruieren?

Lösung: Man vergleiche **2.1.7a**. EV ist die Symmetrieachse der Raute EFVK. Wenn man die Leitgerade hat, bekommt man V aus K und damit EV als Tangente.

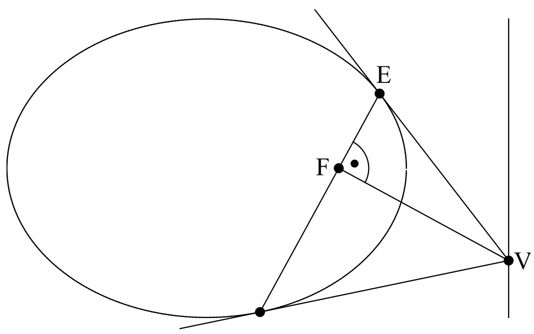


2.4.2: Analogisieren Sie **1.4.2**.

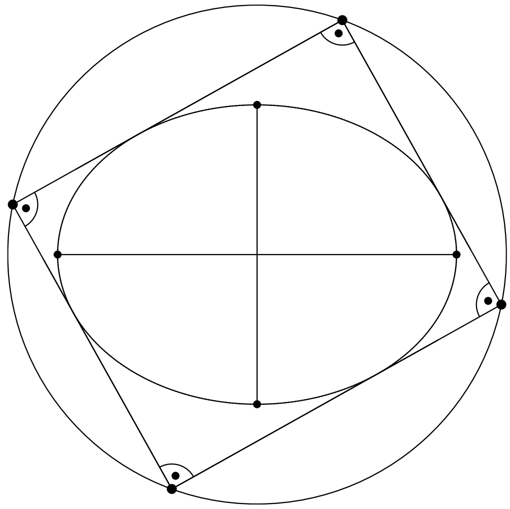
Lösung:

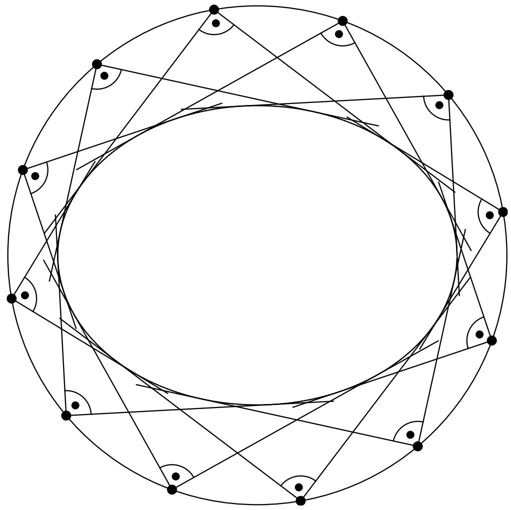
Die Tangente in E schneide die zu F gehörige Leitgerade in V. nach 2.4.1.a hat man bei F einen rechten Winkel.

Verlängert man EF über F hinaus, so gelangt man zum Berührpunkt der zweiten Ellipsentangente durch V. Hier greift dasselbe Symmetrieargument wie in **1.4.2**.



2.4.3: Das direkte Analogon zu **1.4.3** ist sowohl für den Leitkreis als auch für die Leitgerade falsch; der geometrische Ort aller Punkte, von denen aus zueinander orthogonale Tangenten an die Ellipse gezogen werden können, ist vielmehr ein Kreis um den „Mittelpunkt“ der Ellipse mit dem Radius $\sqrt{a^2+b^2}$.





2.4.4: Die Analogisierung von **1.4.4** würde nur zu länglichen Rechnungen führen; wir werden bald eine bessere Methode kennenlernen.

2.5 Polaren

Sie werden schon vermuten, dass die Leitgerade die Polare des Brennpunkts ist. Das ist offensichtlich, wenn Sie **2.5.1**–**5** gelöst haben:

2.5.1–**5**: Analogisieren Sie **1.5.1**–**5**!

Lösung: Zur Gleichung der Polaren zu $V=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$: Die Tangente t_i durch den (unbekannten und auch uninteressanten) Berührpunkt $P_i=\begin{pmatrix}x_i\\y_i\end{pmatrix}$ hat die Gleichung $\frac{x\cdot x_i}{a^2}+\frac{y\cdot y_i}{b^2}=1$. Dann liegt $V=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ auf t_i, also gilt $\frac{u\cdot x_i}{a^2}+\frac{v\cdot y_i}{b^2}=1$. Diese Gleichung lässt sich auch so interpretieren, dass die Berührpunkte $P_i=\begin{pmatrix}x_i\\y_i\end{pmatrix}$ auf der Geraden mit der Gleichung $\boxed{\frac{u\cdot x}{a^2}+\frac{v\cdot y}{b^2}=1}$ liegen.

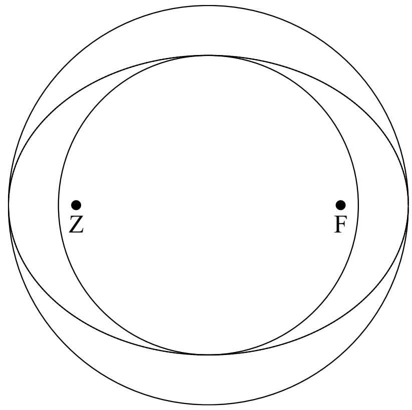
Damit hat man die Polare $V^{\#}$ gefunden.

Was passiert mit $V^{\#}$, wenn V auf einer Geraden läuft?

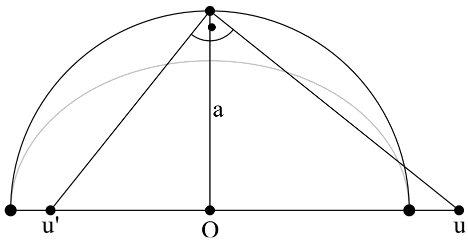
Die Gerade g lässt sich schreiben als $g\colon \frac{c\cdot x}{a^2}+\frac{d\cdot y}{b^2}=1$. Auf ihr liege der Punkt $V=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$, dessen Polare die Gleichung $V^{\#}\colon \frac{u\cdot x}{a^2}+\frac{v\cdot y}{b^2}=1$ hat. Dass V auf g liegt, bedeutet, dass $\frac{c\cdot u}{a^2}+\frac{d\cdot v}{b^2}=1$ gilt. Diese Gleichung lässt sich aber auch so interpretieren, dass der Punkt $g^{\#}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ auf $V^{\#}$ liegt. Also: Wandert V auf g, so dreht sich $V^{\#}$ um $g^{\#}$.

2.5.6: Konstruieren Sie zu jedem Punkt (unabhängig davon, ob er auf, außerhalb oder innerhalb der Ellipse liegt) die zugehörige Polare. Lassen Sie sich hierbei von der Polarengleichung $\frac{x \cdot u}{a^2} + \frac{y \cdot v}{b^2} = 1$ leiten. Die Polare schneidet die x-Achse (Hauptscheitelachse) in $\begin{pmatrix} a^2/u \\ 0 \end{pmatrix}$ und die y–Achse (Nebenscheitelachse) in $\begin{pmatrix} 0 \\ b^2/v \end{pmatrix}$.

Ferner gehört zu einer Ellipse nicht nur ein (Haupt–)Scheitelkreis, sondern auch ein <u>Nebenscheitelkreis</u>.



Lösung: Man kommt vom Punkt $\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Punkt $\begin{pmatrix} u' \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $u' = -\frac{a^2}{u}$ durch Beachtung des Höhensatzes in der Figur.

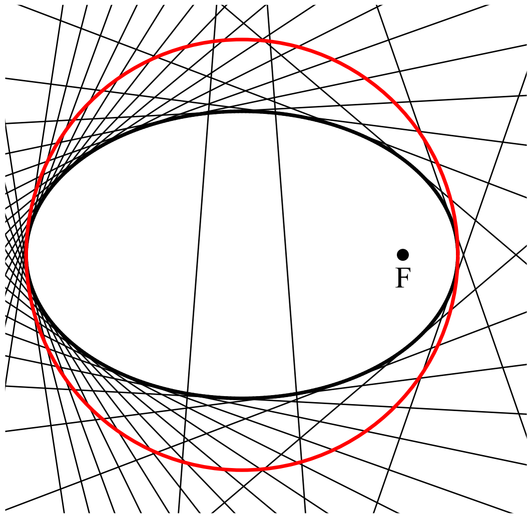


Damit kann man die beiden Polaren-Punkte $\begin{pmatrix} a^2/u \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ b^2/v \end{pmatrix}$ konstruieren: Man projiziert $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ auf die Achsen, wendet auf die so erhaltenen Punkte das in der Figur angegebene Verfahren an (auf der x–Achse mit dem Hauptscheitelkreis und auf der y–Achse mit dem Nebenscheitelkreis) und hat damit zwei Punkte der gesuchten Polare.

2.6 Hüllkurven

In **2.1.3–4** haben Sie gesehen, dass FM auf der Ellipsentangente senkrecht steht und dass M auf dem Scheitelkreis liegt.

2.6.1: Wenn M den (roten) Haupt-Scheitelkreis durchläuft und immer die Senkrechten zu FM durch M gezeichnet werden, so bekommt man alle Tangenten der Ellipse.
Die Ellipse erscheint als Hüllkurve ihrer Tangenten.
Das Prinzip sei hier noch einmal vorgerechnet; bei der praktischen Durchführung ist ein Computer–Algebra–System hilfreich.



Es sei $F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$ der Brennpunkt und

$M = a \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ ein Punkt auf dem Scheitelkreis.

Die Senkrechte zu FM durch M hat dann die Gleichung $(X - M) \cdot (M - F) = 0$. Sie schneidet sich mit der zu $a \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix}$ gehörigen Senkrechten in einem gewissen Punkt, und nach Ausführung des Grenzübergangs $\psi \to \varphi$ erhält man den Berührpunkt $\frac{1}{a - f \cdot \cos\varphi} \cdot \begin{pmatrix} a \cdot (a \cdot \cos\varphi - f) \\ b^2 \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}$, der die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ erfüllt (vgl. den im Anhang dargestellten zweiten Weg zu den Gleichungen).

2.7 Hüllkurven von Kreispolaren

Analog zu **1.7** lassen sich nunmehr Hüllkurven von Polaren betrachten. Um die Rechnung zu vereinfachen, gehen wir allerdings nicht von einer allgemeinen Ellipse aus, sondern vom (dick gezeichneten schwarzen) Einheitskreis; die Polare zu $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ hat die Gleichung $u \cdot x + v \cdot y = 1$.

Ein Punkt V laufe auf einem anderen Kreis (dem rot gezeichneten Polkreis). Was passiert mit seinen Polaren bezüglich des Einheitskreises?

2.7.1: Untersuchen Sie verschiedene Hüllkurven von Kreispolaren. Versuchen Sie, die folgenden Rechnungen nachzuvollziehen; ein Computer–Algebra–System mag dabei hilfreich sein.

Der Polkreis habe den Mittelpunkt $\begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix}$ und den Radius ρ, also die Gleichung $(x - \mu)^2 + y^2 = \rho^2$; ein beliebiger Punkt auf ihm ist dann $U_\varphi = \begin{pmatrix} \mu + \rho \cdot \cos\varphi \\ \rho \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}$; die zugehörige Polare ist

$U_\varphi^{\#}:\ x \cdot (\mu + \rho \cdot \cos\varphi) + y \cdot \rho \cdot \sin\varphi = 1$.

Sie schneidet sich mit dem analogen $U_\psi^{\#}$ in einem Punkt, und nach einem Grenzübergang $\psi \to \varphi$ gelangt man zu $\boxed{\frac{1}{\rho + \mu \cdot \cos\varphi} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}}$ als allgemeinem Punkt der (blauen) Polarenkurve.

Um was für eine Kurve handelt es sich?

Ist der Polkreis zum Grundkreis konzentrisch, also $\mu=0$, so bekommt man natürlich wieder einen Kreis.

Ansonsten hilft eine Entparametrisierung:

Aus $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{\rho+\mu\cdot\cos\varphi}\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix}$ folgt $x=\frac{\cos\varphi}{\rho+\mu\cdot\cos\varphi}$, also $\cos\varphi=\frac{x\cdot\rho}{1-x\cdot\mu}$.

Dann ist $y^2=\frac{\sin^2\varphi}{(\rho+\mu\cdot\cos\varphi)^2}=\frac{1-\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}\cdot x^2=x^2\cdot\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}-1\right)=x^2\cdot\left(\frac{(1-x\cdot\mu)^2}{x^2\cdot\rho^2}-1\right)=\frac{(1-x\cdot\mu)^2}{\rho^2}-x^2$,

und folglich ist $\boxed{y^2\cdot\rho^2=1-2\cdot x\cdot\mu+x^2\cdot(\mu^2-\rho^2)}$ die Gleichung der Polarenkurve.

Hier sind mehrere Fälle zu unterscheiden:

a.) $\mu=\rho$ Der Polkreis geht durch den Mittelpunkt des Grundkreises. Die obige Gleichung vereinfacht sich zu $y^2\cdot\mu^2=1-2\cdot x\cdot\mu$; es handelt sich um eine Parabel.

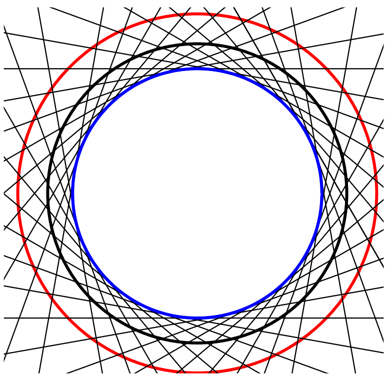
Durch Umformen der Parabelgleichung zu $x=\frac{1}{2\cdot\mu}-\frac{\mu}{2}\cdot y^2$ erkennt man den Scheitelpunkt $\begin{pmatrix}1/(2\cdot\mu)\\0\end{pmatrix}$ und den Brennpunkt $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Die Parabel hat also den Grundkreismittelpunkt als Brennpunkt.

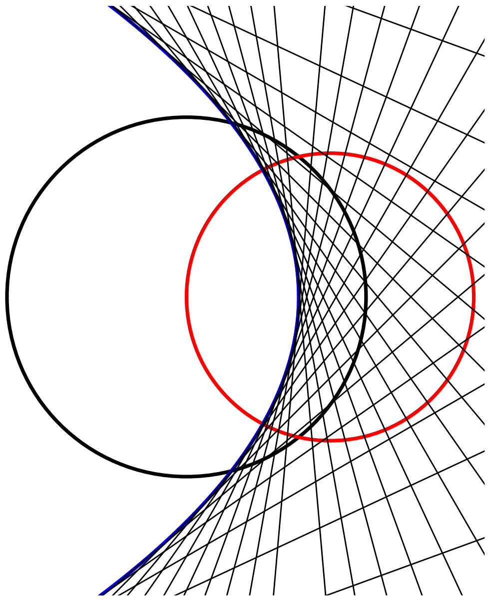
Wird der Polkreisradius größer, verringert sich der Abstand zwischen Scheitelpunkt und Brennpunkt, so dass die Parabel enger wird.

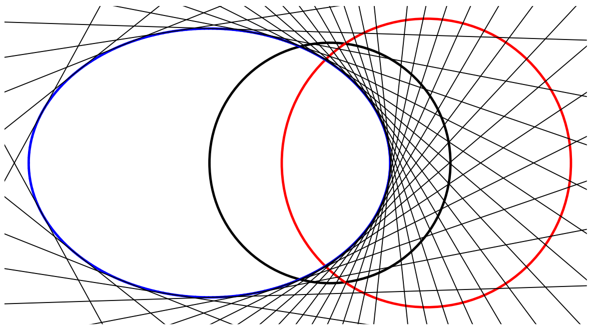
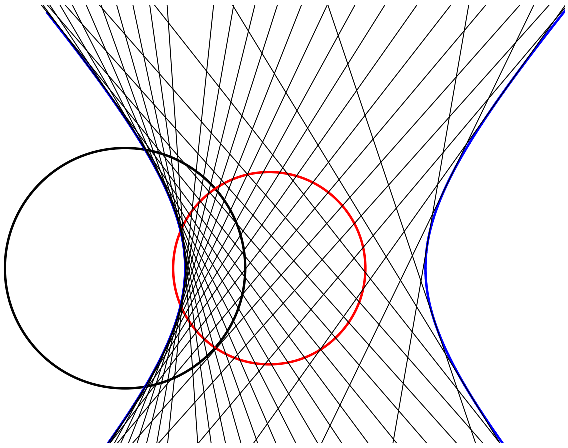
b.) $\mu<\rho$ Der Polkreis umschließt den Mittelpunkt des Grundkreises.

Mit $d^2=\rho^2-\mu^2$ vereinfacht sich die obige Gleichung zu $x^2\cdot d^2+2\cdot x\cdot\mu+y^2\cdot\rho^2=1$. Es handelt sich um eine in x–Richtung verschobene Ellipse.

c.) Im Fall $\mu>\rho$ ergibt sich eine Hyperbel. Diese Kurve werden Sie näher im Abschnitt **3** kennenlernen.





2.9 Die Scheitelkrümmungskreise der Ellipse

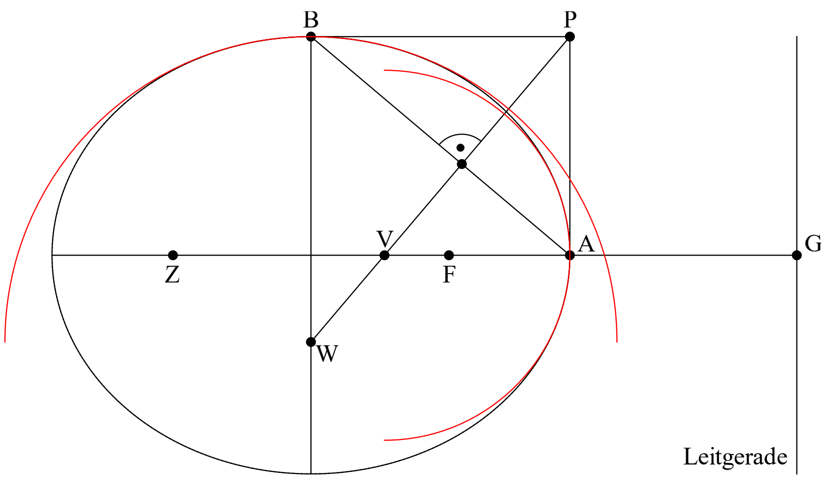
Der Radius des **Krümmungskreises** zur Kurve mit dem allgemeinen Punkt $P(t)$ ist $\rho(t)=\frac{P'^2}{P'^{\perp}\cdot P''}\cdot|P'|$.

Für $P(t)=\begin{pmatrix}a\cdot\cos t\\ b\cdot\sin t\end{pmatrix}$ bekommt man $\rho(0°)=\frac{b^2}{a}$ und $\rho(90°)=\frac{a^2}{b}$.

Mit $A=\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$ ist der Mittelpunkt V des Krümmungskreises zu A daher $V=\begin{pmatrix}a-\frac{b^2}{a}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f^2/a\\0\end{pmatrix}$, und mit

$B=\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}$ ist der Mittelpunkt W des Krümmungskreises zu B gegeben durch $W=\begin{pmatrix}0\\b-\frac{a^2}{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-f^2/b\end{pmatrix}$.

Die Gerade durch V und W hat die Gleichung $y=\frac{a}{b}\cdot x-\frac{f^2}{b}$, auf ihr liegt der Punkt $P=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, und sie steht auf AB senkrecht. Das führt zu nebenstehender Konstruktion.



Man hat mit $\varepsilon=\frac{f}{a}$ die Kette $\boxed{G=\begin{pmatrix}a^2/f\\0\end{pmatrix}\xrightarrow{\cdot\varepsilon}A=\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}\xrightarrow{\cdot\varepsilon}F=\begin{pmatrix}f\\0\end{pmatrix}\xrightarrow{\cdot\varepsilon}V=\begin{pmatrix}f^2/a\\0\end{pmatrix}}$.

2.10 Ellipsen aus 3 Punkten und dem Brennpunkt

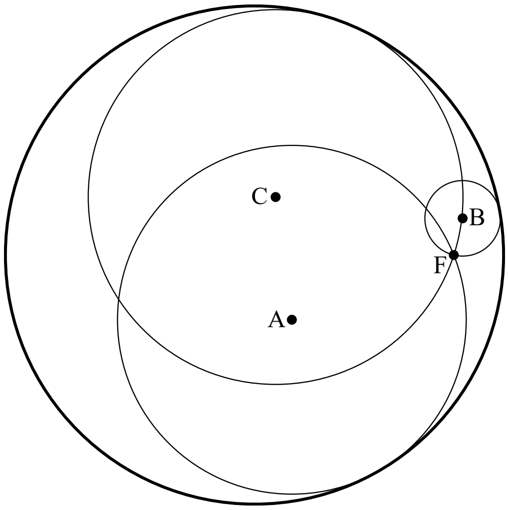
2.10_a: Gegeben seien drei Punkte A, B, C auf dem Kegelschnitt und ein Brennpunkt F. Wie konstruiert man die zugehörige Leitgerade?

Ist g die Leitgerade, so ist $|FA|=\varepsilon\cdot|gA|$, $|FB|=\varepsilon\cdot|gB|$, $|FC|=\varepsilon\cdot|gC|$.

Hier liegt die Verwendung von auf A, B, C bezogenen baryzentrischen Koordinaten nahe, wo Punkte die Gestalt $P=(u:v:w)=\dfrac{u\cdot A+v\cdot B+w\cdot C}{u+v+w}$ und Geraden die Gestalt $g=\left[|gA|:|gB|:|gC|\right]$ haben. Der Punkt $(u:v:w)$ liegt auf der Geraden $[U:V:W]$ genau dann, wenn $u\cdot U+v\cdot V+w\cdot W=0$ ist.

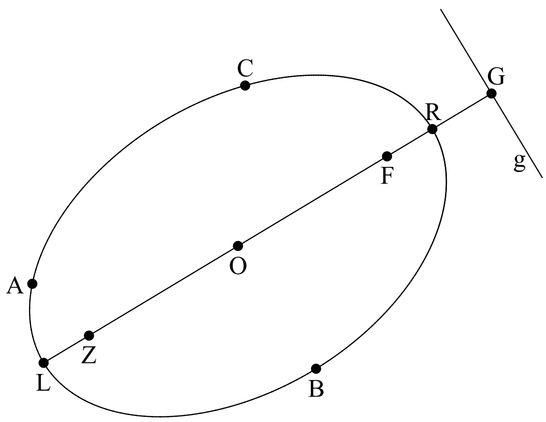
Es ist also $g=\left[|gA|:|gB|:|gC|\right]=\left[|AF|:|BF|:|CF|\right]$. Diese Gerade schneidet $AB=[0:0:1]$ in $(-d(B,F):d(A,F):0)$ und $BC=[1:0:0]$ in $(0:-d(C,F):d(B,F))$.

Alternativ kann man auch den Leitkreis als APOLLONIUS-Berührkreis identifizieren, dann die vorgegebenen Punkte A, B und C müssen von F den gleichen Abstand haben wie zum Leitkreis.



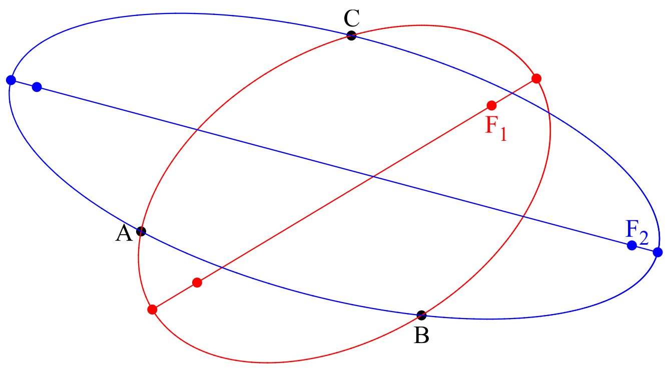
2.10_b: Gegeben ein Ellipsenpunkt E, ein Brennpunkt F und die zugehörige Leitgerade g. Wie konstruiert man den zweiten Brennpunkt?

Lösung: Man bestimmt $\varepsilon=\dfrac{|EF|}{|gE|}$ und konstruiert die Brennpunktsachse als die zu g senkrechte Gerade FG durch F. Der G zugewandte Pol R berechnet sich wegen $\dfrac{|RF|}{|RG|}=\varepsilon$ zu $R=\dfrac{F+\varepsilon\cdot G}{1+\varepsilon}$, und für den G nicht zugewandten Pol L gilt wegen $\dfrac{|LF|}{|LG|}=\varepsilon$ analog $L=\dfrac{F-\varepsilon\cdot G}{1-\varepsilon}$.



Damit hat man den Mittelpunkt $O=\dfrac{L+R}{2}=\dfrac{F-\varepsilon^2\cdot G}{1-\varepsilon^2}$ und schließlich $Z=2\cdot O-F=\dfrac{\left(1+\varepsilon^2\right)\cdot F-2\cdot\varepsilon^2\cdot G}{1-\varepsilon^2}$.

Natürlich gibt es viele Ellipsen durch 3 vorgegebene Punkte.

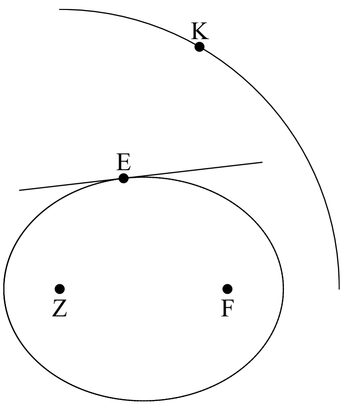


2.11 Ellipse aus 3 Tangenten und einem Brennpunkt

Lösung:

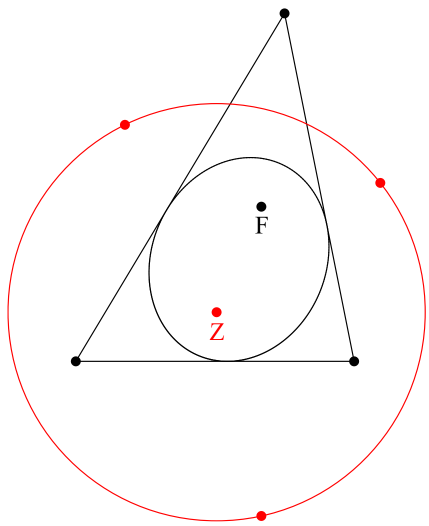
Sind F und die Tangente zu E gegeben, so bekommt man K durch Spiegelung an dieser Tangente.

Mit drei Tangenten bekommt man drei Punkte auf dem Leitkreis und damit auch dessen Zentrum Z.

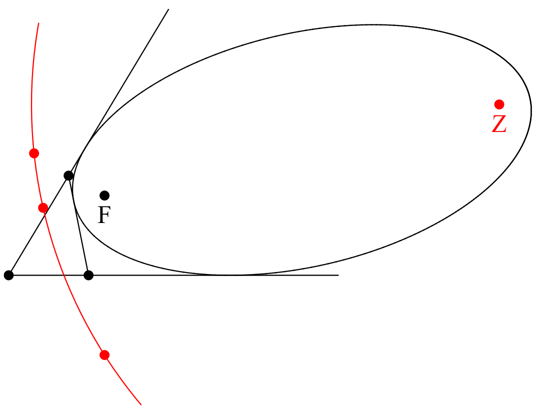


Liegt der Brennpunkt im Inneren der drei Tangenten, so bekommt man eine In-Ellipse des Dreiecks ABC:

Man spiegelt F an den Dreiecksseiten (Ergebnis: Die roten Punkte); dadurch ist der rote Leitkreis festgelegt und dessen Zentrum Z.



Liegt der Brennpunkt nicht im Inneren der drei Tangenten, so bekommt man keine In-Ellipse, sondern eine An-Ellipse.



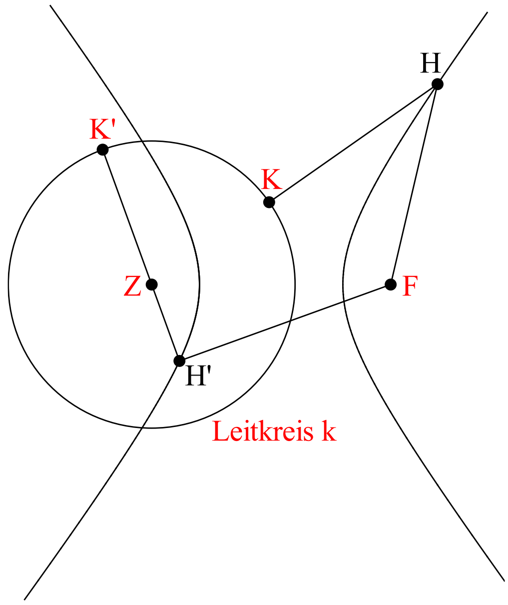
3. Hyperbeln

3.1 Allgemeine Eigenschaften

Ein Ellipsenpunkt wurde konstruiert als Schnittpunkt von ZK mit der Mittelsenkrechten zu FK.

3.1.0: Was passiert, wenn man diese Konstruktion auch für den Fall ausführt, dass F außerhalb des Leitkreises liegt? Die entstehende Figur heißt Hyperbel.

Für den linken Ast ist $|kP|$ nicht die kürzeste, sondern die längste Entfernung $|KP|$ für Punkte K auf dem Kreis k.
Die gemeinsame Kennzeichnung ist: „$|kP|$ ist die extremale Entfernung $|KP|$“. Die Überlegungen zur Ellipse bleiben davon unberührt.
Hier sieht man übrigens, dass sinnvolle Definitionen nicht willkürlich sein können.

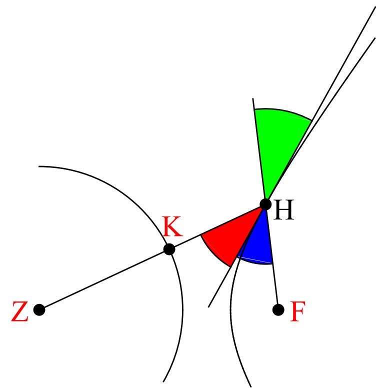


3.1.1: Eine Hyperbel besteht aus allen Punkten, die zu einem Kreis k (dem Leitkreis) und zu einem Punkt F (dem Brennpunkt), der außerhalb von k liegt, denselben Abstand haben.

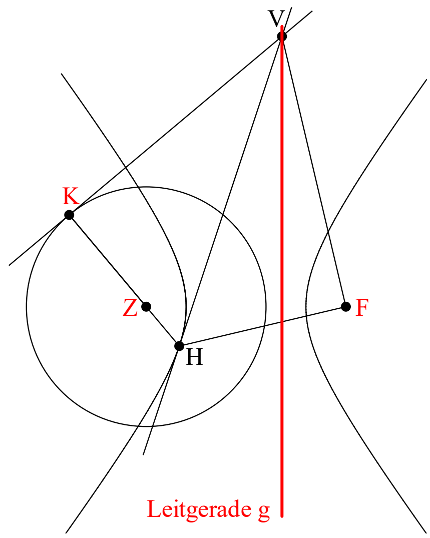
3.1.2–7c: Übertragen Sie die bei der Ellipse angestellten allgemeinen Überlegungen auf die Hyperbel!

Lösung: Die die Hyperbel definierende Gleichung ist jetzt $\left||HF|-|HZ|\right|=r$.

Der Scheitelkreis hat auch hier den Mittelpunkt $\frac{Z+F}{2}$ und den Radius r/2.
Die Scheitelpunkte der Hyperbel liegen auf ihm.
Die Mittelsenkrechte zu FK ist Tangente.
Zum Hyperbolspiegel: Jeder von Z kommende Strahl wird an einem Hyperbelast so reflektiert, als käme er ohne Reflexion direkt von F.



Leitgerade g und der begleitende Drachen HFVK ergeben sich genauso wie bei der Ellipse.

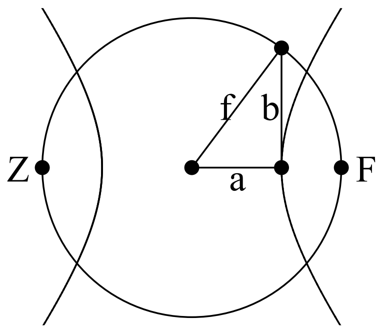


3.2 Gleichungen

Nehmen Sie als Ursprung des Koordinatensystems wieder den Mittelpunkt des Scheitelkreises, also die Mitte zwischen Z und F. Es sei $F=\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$, also $Z=\begin{pmatrix} -f \\ 0 \end{pmatrix}=-F$. Der Leitkreis habe den Radius r.

3.2.1: Sinnvolle Abkürzungen sind $\frac{r}{2}=a$ und $f^2-a^2=b^2$.

Die Deutung von b ergibt sich aus der Graphik.



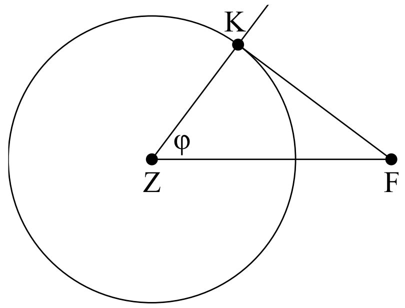
3.2.2: Für einen Hyperbelpunkt $H=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ gilt: $|HF|=\pm\left(\frac{x\cdot f}{a}-a\right)$, wobei das obere Zeichen für den rechten Hyperbelast und das untere Zeichen für den linken gilt.

Lösung: H ist durch $|HZ|-|HF|=\pm 2\cdot a$ charakterisiert; das obere Zeichen gilt für den rechten Hyperbelast., das untere für den linken. Ferner ist (wie bei der Ellipse) $|HZ|^2=(x+f)^2+y^2$ und $|HF|^2=(x-f)^2+y^2$, also $|HZ|^2-|HF|^2=4\cdot x\cdot f$.

Mithin ist $|HZ|+|HF|=\frac{|HZ|)^2-|HF|^2}{|HZ|-|HF|}=\frac{4\cdot x\cdot f}{\pm 2\cdot a}=\pm\frac{2\cdot x\cdot f}{a}$, was zusammen mit $|HZ|-|HF|=\pm 2\cdot a$ ergibt, dass $|HF|=\pm\left(\frac{x\cdot f}{a}-a\right)$ ist.

Hieraus gewinnt man wie bei der Ellipse die Hyperbelgleichung $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

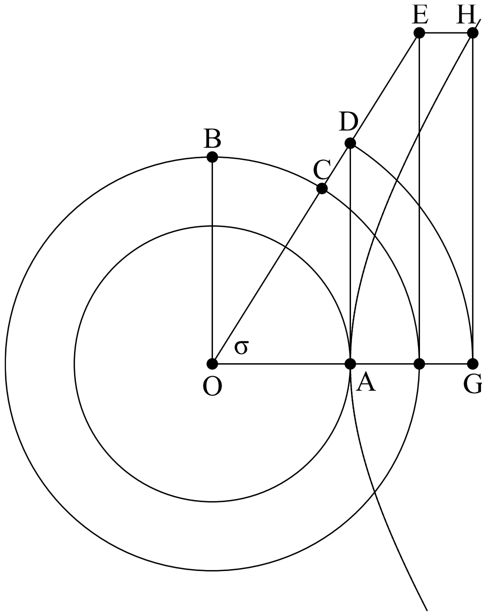
Es kann sein, dass die Gerade ZK und die Mittelsenkrechte zu FK zueinander parallel sind, so dass im Endlichen kein Schnittpunkt existiert. Das ist der Fall, falls das Dreieck ZFK rechtwinklig ist, also für $\cos\varphi = \frac{r}{2\cdot f} = \frac{a}{f}$.



3.2.4: Sie können einen beliebigen Hyperbelpunkt P auch schreiben als $P = \begin{pmatrix} a/\cos\sigma \\ b\cdot\tan\sigma \end{pmatrix}$.

Wie konstruiert man $H = \frac{1}{\cos\sigma}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b\cdot\sin\sigma \end{pmatrix}$, wenn man die Achsen sowie a und b kennt?

Ausgangspunkt sind zwei Kreise um $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, der eine durch $A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, der andere durch $B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$.



$C = b\cdot\begin{pmatrix} \cos\sigma \\ \sin\sigma \end{pmatrix}$ durchlaufe den Kreis durch B.

OC schneidet die Gerade mit $x = a$ in $D = \frac{a}{b\cdot\cos\sigma}\cdot C = a\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ \tan\sigma \end{pmatrix}$ und die Gerade mit $x = b$ in $E = \frac{1}{\cos\sigma}\cdot C = b\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ \tan\sigma \end{pmatrix}$. Der Kreis um O durch D hat den Radius $\frac{a}{\cos\sigma}$ und schneidet die x-Achse in $G = \frac{a}{\cos\sigma}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $H = \frac{1}{\cos\sigma}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b\cdot\sin\sigma \end{pmatrix}$.

Dann ist $P = \begin{pmatrix} a/\cos\sigma \\ b\cdot\tan\sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos\sigma}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b\cdot\sin\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\sigma} - \frac{\sin^2\sigma}{\cos^2\sigma} = 1$.

Eine weitere Parameterdarstellung ist $P = \begin{pmatrix} \pm a\cdot\cosh t \\ b\cdot\sinh t \end{pmatrix}$.

Dreht man den Punkt $\begin{pmatrix} a \\ 1/a \end{pmatrix}$ der einfachsten Hyperbel mit der Gleichung $\boxed{x\cdot y = 1}$ im Uhrzeigersinn um 45°, bekommt man den Punkt $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix} a+1/a \\ -a+1/a \end{pmatrix}$, der die Gleichung $\boxed{\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1}$ erfüllt.

Damit geht jede Hyperbel aus der einfachsten durch Drehung und Achsenstreckungen hervor.

3.2.5: Die Tangente zu dem Hyperbelpunkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ hat die Gleichung $\frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$.

3.2.6: Zeigen Sie, dass die zu F gehörige Leitgerade die Gleichung $\boxed{g:\ x = \frac{a^2}{f}}$ hat; sie liegt zwischen Leitkreis und Hyperbelast.

3.2.7: Für jeden Hyperbelpunkt P gilt also $|FP| = \varepsilon \cdot |gP|$ mit $\varepsilon = \frac{f}{a}$. ε heißt **numerische Exzentrizität**.

Lösung: Man schreibe $|PF| = \pm\left(\frac{x \cdot f}{a} - a\right) = \pm\frac{f}{a} \cdot \left(x - \frac{a^2}{f}\right)$. Für den rechten Hyperbelast ist $|gP| = x - \frac{a^2}{f}$, für den linken Ast ist $|gP| = \frac{a^2}{f} - x$. Daher ist $|PF| = \frac{f}{a} \cdot |gP|$.

Die numerischen Exzentrizitäten verteilen sich wie folgt:

Eine <u>Ellipse</u> besteht aus allen Punkten P mit $|FP| = \varepsilon \cdot |gP|$, wobei $0 < \varepsilon < 1$ ist.

Bei einem <u>Kreis</u> ist $a = b$, also $f = 0$ und damit , und die Leitgerade ist „im Unendlichen", so dass die Gleichung $|FP| = \varepsilon \cdot |gP|$ keinen rechten Sinn ergibt.

Eine <u>Hyperbel</u> besteht aus allen Punkten P mit $|FP| = \varepsilon \cdot |gP|$, wobei $1 < \varepsilon$ ist.

Eine <u>Parabel</u> besteht aus allen Punkten P mit $|FP| = \varepsilon \cdot |gP|$, wobei $\varepsilon = 1$ ist.

Es ist zwar historisch nicht korrekt, aber man kann sich die Namen der Kegelschnitte so erklären:

Bei der Parabel (Gleichnis) hat man Gleichheit von ε und 1; bei der Ellipse (Mangel) mangelt es dem ε an der Eins; bei der Hyperbel (Übertreibung) übertrifft das ε die Eins.

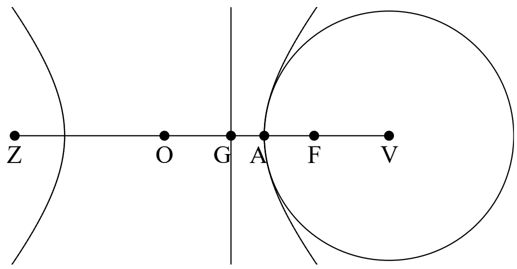
3.3 Der Scheitelkrümmungskreis der Hyperbel

Der Radius des Krümmungskreises zur Kurve mit dem allgemeinen Punkt $P(t)$ ist $\rho(t) = \frac{P'^2}{P'^{\perp} \cdot P''} \cdot |P'|$.

Für $P(t) = \begin{pmatrix} a / \cos t \\ b \cdot \tan t \end{pmatrix}$ bekommt man $\rho(0°) = \frac{b^2}{a}$.

Mit $A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ ist der Mittelpunkt V des Krümmungskreises zu A daher $V = \begin{pmatrix} a + \frac{b^2}{a} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^2 / a \\ 0 \end{pmatrix}$.

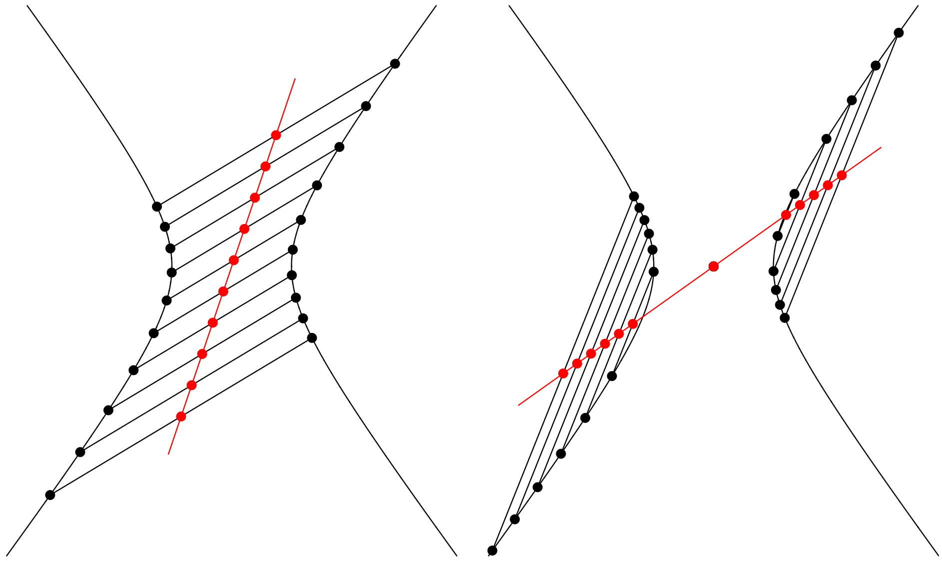
In der Graphik rechts ist O der „Mittelpunkt" der Hyperbel, und die Senkrechte durch G ist die zu F gehörige Leitgerade.



Man hat mit $\varepsilon=\frac{f}{a}$ die Kette $\boxed{G=\begin{pmatrix}a^2/f\\0\end{pmatrix}\xrightarrow{\cdot\varepsilon}A=\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}\xrightarrow{\cdot\varepsilon}F=\begin{pmatrix}f\\0\end{pmatrix}\xrightarrow{\cdot\varepsilon}V=\begin{pmatrix}f^2/a\\0\end{pmatrix}}$.

3.4 Konstruktionsaufgaben

Auch bei Hyperbeln sind die Mittelpunkte zueinander paralleler Sehnen kollinear auf einer Ursprungsgeraden.



Lösung: Die Gerade mit $y=m\cdot x+n$ schneidet die Hyperbel mit $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ in den Punkten

$\frac{1}{a^2\cdot m^2-b^2}\cdot\begin{pmatrix}-a^2\cdot m\cdot n\pm a\cdot b\cdot\sqrt{-a^2\cdot m^2+b^2+n^2}\\-b^2\cdot n\pm a\cdot b\cdot m\cdot\sqrt{-a^2\cdot m^2+b^2+n^2}\end{pmatrix}$; deren Mittelpunkt ist $\frac{n}{2\cdot\left(a^2\cdot m^2-b^2\right)}\cdot\begin{pmatrix}-a^2\cdot m\\-b^2\end{pmatrix}$ und

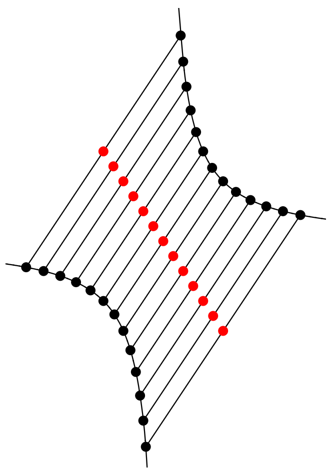
liegt auf der Geraden mit $y=\frac{b^2}{a^2\cdot m}\cdot x$. Die Steigungen $m\neq 0$ und $\frac{b^2}{a^2\cdot m}$ heißen zueinander konjugiert.

Wie bei der Ellipse kann man sich zum Nachweis auf die rechtwinklige Hyperbel mit $x^2-y^2=1$ beschränken, da die allgemeinere Hyperbel mit $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ aus der rechtwinkligen durch Stauchung hervorgeht.

Warnung: Bei der rechtwinkligen Hyperbel mit $x^2-y^2=2$ (Graphiken oben) gilt für zwei zueinander konjugierte Steigungen m_1 und m_2 nach Obigem die Beziehung $m_1\cdot m_2=1$.

Dreht man die Hyperbel zu $x\cdot y=1$ (Graphik rechts), gilt für die konjugierten Steigungen $m_1+m_2=0$.

Die Beziehung $m_1\cdot m_2=\frac{b^2}{a^2}$ ist also an die Achse ZF gebunden.



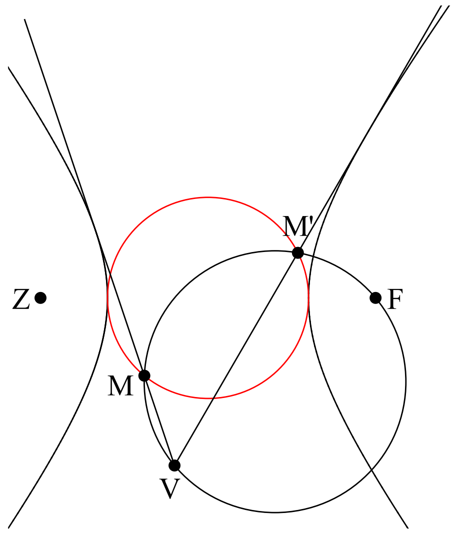
3.3.1–2: Formulieren Sie die Analoga zu **1.3.0–2** bzw. **2.3.0–2**, und lösen Sie sie.

Lösung: Die Vorgehensweise ist völlig analog zum Ellipsenfall.

3.3.3: Eine Hyperbel liege mit ihren Achsen gezeichnet vor. Konstruieren Sie die Brennpunkte.

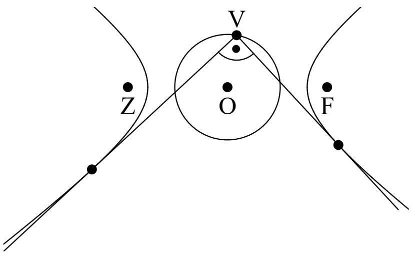
Lösung: Hat die Hyperbel die Gleichung $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, so sind die Nullstellen durch $\pm a$ gegeben. An der Stelle $x=2\cdot a$ ist $y^2=3\cdot b^2$, woraus sich b ermitteln lässt. Aus $f^2=a^2+b^2$ bekommt man f.

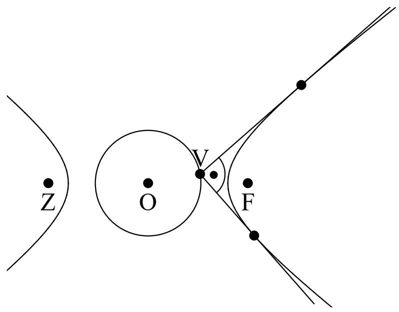
3.3.4: Man konstruiere die Tangenten von einem Punkt V außerhalb der Hyperbel.



Lösung (analog zum Ellipsenfall):
Schneidet eine Tangente den Scheitelkreis in M, so steht FM auf der Tangente senkrecht. Man konstruiere also zunächst F. Dann schlage man den Thaleskreis über FV. Dieser schneidet den Scheitelkreis in M und M'. Die Geraden VM und VM' sind dann die gesuchten Tangenten.

Bei Hyperbeln ist der geometrische Ort aller Punkte V, von denen aus zwei zueinander senkrechte Tangenten gelegt werden können, ein Kreis um den „Mittelpunkt" O mit dem Radius $\sqrt{a^2-b^2}$.

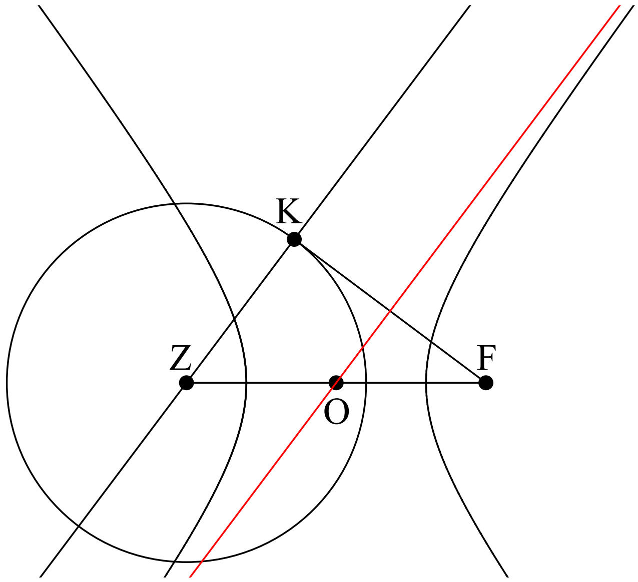




Dieser Kreis ist nur für $a>b$ reell.

3.5 Asymptoten

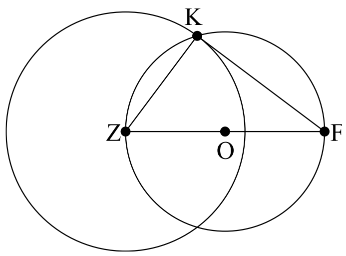
3.5.1: Wenn man den Punkt K auf dem Leitkreis laufen lässt und versucht, den zugehörigen Hyperbelpunkt als Schnittpunkt von ZK mit der Mittelsenkrechten zu KF zu konstruieren, wobei diese Mittelsenkrechte Tangente ist, so kann es sein, dass KF Tangente an den Leitkreis wird und damit die Mittelsenkrechte zu KF zu ZK parallel ist. Der Hyperbelpunkt liegt dann „im Unendlichen“ und die Mittelsenkrechte zu KF, die dann wegen des Strahlensatzes durch den „Mittelpunkt“ O der Hyperbel gehen muss, ist gar keine „richtige“ Tangente.



Solche „unrichtigen“ Tangenten heißen <u>Asymptoten</u>.

3.5.2: Gegeben seien F und der Leitkreis k. Konstruieren Sie die Asymptoten, und begründen Sie die Konstruktion.

Lösung: FK muss auf KZ senkrecht stehen. Also ist K der Schnittpunkt von Leitkreis und Thaleskreis über ZF. Die Mittelsenkrechte zu KF ist dann eine Asymptote.



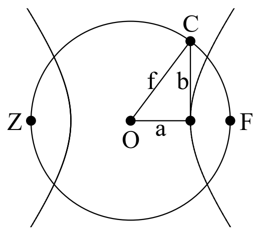
3.5.3: Die Asymptoten zu $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ haben die Gleichungen $y=\pm\frac{b}{a}\cdot x$. Hieraus folgt eine einfachere Konstruktion der Asymptoten.

Lösung: Leitkreis mit $(x+f)^2+y^2=4\cdot a^2$ und Thaleskreis mit $x^2+y^2=f^2$ schneiden sich in , also ist $M=\frac{1}{f}\cdot\begin{pmatrix}-b^2\\ \pm a\cdot b\end{pmatrix}$. Die Steigung von OM ist somit $\pm\frac{b}{a}$.

Dass die Asymptote tatsächlich Asymptoteneigenschaften hat, sieht man rechnerisch so ein: Mit $y_{Hyp}=\frac{b}{a}\cdot\sqrt{x^2-a^2}$ und $y_{As}=\frac{b}{a}\cdot x$ folgt:

$$y_{As}-y_{Hyp}=\frac{y_{As}^2-y_{Hyp}^2}{y_{As}+y_{Hyp}}=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\xrightarrow{x\to\infty}0.$$

Zur Asymptoten<u>konstruktion</u>: Die Gerade durch O und C ist die Asymptote.

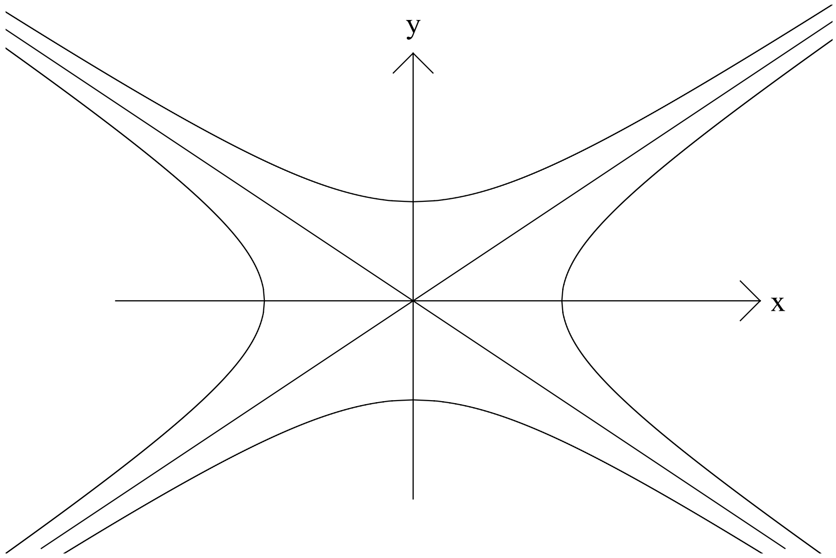


Die Hyperbeln zu

$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ und zu

$-\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ haben

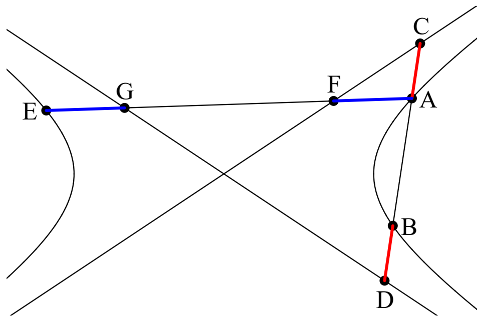
die gleichen Asymptoten und heißen zueinander <u>konjugiert</u>.



3.5.4: Für jede Hyperbelsekante gilt:

$$\begin{aligned}|DB|&=|AC|\\|AF|&=|GE|\end{aligned}.$$

Daher kann man mit den Asymptoten und einem einzigen Hyperbelpunkt die gesamte Hyperbel rekonstruieren.

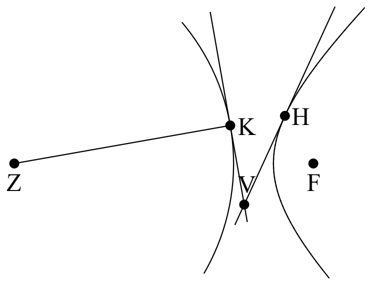


Lösung: Da bei Drehungen und Achsenstreckungen Abstandsverhältnisse invariant bleiben, kann man sich auf die einfachste Hyperbel mit der Gleichung $x\cdot y=1$ beschränken. Die Gerade durch $\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix}$ hat die Gleichung $\frac{x}{u}+\frac{y}{v}=1$ und schneidet die einfachste Hyperbel in den Punkten $\begin{pmatrix}\frac{u}{2}\pm\frac{\sqrt{u^2\cdot v^2-4\cdot u\cdot v}}{2\cdot v}\\\frac{v}{2}\mp\frac{\sqrt{u^2\cdot v^2-4\cdot u\cdot v}}{2\cdot u}\end{pmatrix}$, deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt von $\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix}$ übereinstimmt.

3.6 Weitere Eigenschaften der Tangenten

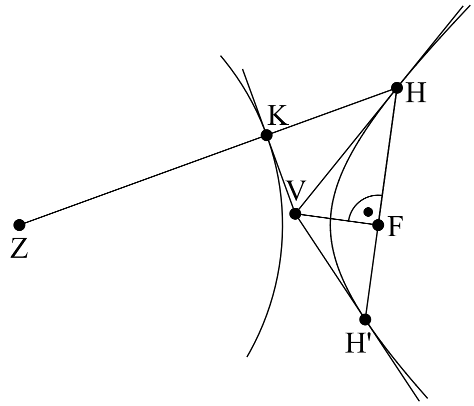
3.6.1: Hyperbeltangente und die zugehörige Kreistangente schneiden sich auf derjenigen Leitgeraden, die nicht zum Leitkreiszentrum gehört.

Wenn man die Leitgerade hat, bekommt man V aus K und damit VH als Tangente



3.6.2: V sei auf der Leitgeraden zu F und HV eine Hyperbeltangente. Nach **3.6.1** ist bei F ein rechter Winkel. Verlängert man HF über F hinaus, so liefert der Schnittpunkt mit der Hyperbel den Berührpunkt der zweiten Tangente durch V an die Hyperbel.

Lösung: Die Begründung ist analog zum Parabel- oder Ellipsenfall.



3.7 Polaren

3.7.1–**5**: Analogisieren Sie **1.5.1**–**5** bzw. **2.5.1**–**5**.

Lösung: Alles offensichtlich wie bei der Ellipse. Zu $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ gehört $\frac{u \cdot x}{a^2} - \frac{v \cdot y}{b^2} = 1$.

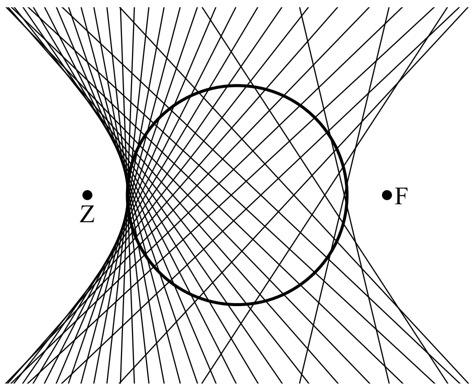
3.7.6: Analogisieren Sie **2.5.6**.

Lösung: Die Polare $\frac{u \cdot x}{a^2} - \frac{v \cdot y}{b^2} = 1$ schneidet die x-Achse (Hauptscheitelachse) in $\begin{pmatrix} a^2/u \\ 0 \end{pmatrix}$ und die y–Achse (Nebenscheitelachse) in $\begin{pmatrix} 0 \\ -b^2/v \end{pmatrix}$. Damit ist die Polarenkonstruktion nur eine leichte Modifikation des Ellipsenfalles.

3.8 Hüllkurven

3.8.1 Wenn M den Scheitelkreis durchläuft und immer die Senkrechten zu FM durch M gezeichnet werden, so bekommt man alle Tangenten der Hyperbel.

Die Hyperbel erscheint als Hüllkurve ihrer Tangenten. Die Rechnung ist analog zum Ellipsenfall.

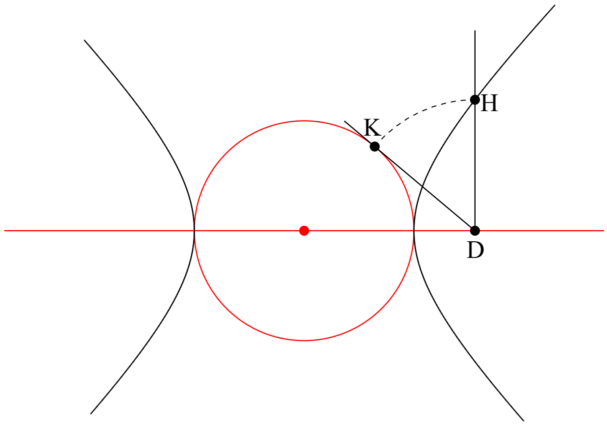


3.9 Andere Hyperbelkonstruktionen

3.9.1: Der Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ ist eine besonders symmetrische Ellipse. Eine besonders symmetrische Hyperbel hat entsprechend die Gleichung $x^2 - y^2 = r^2$; sie heißt rechtwinklige Hyperbel (warum?). Eine verblüffend einfache Konstruktion einer rechtwinkligen Hyperbel ist die folgende:

Gegeben sind ein Kreis (rot) und ein Durchmesser (rot). K durchlaufe den Kreis. Die Kreistangente durch K schneidet den Durchmesser in D. Man errichtet die Senkrechte zum Durchmesser in D.

Dann liegt derjenige Punkt H auf der Senkrechten, für den $|DK|=|DH|$ ist, auf einer rechtwinkligen Hyperbel, die den Ausgangskreis zum Scheitelkreis hat. Begründen Sie die Konstruktion.



Warnung: Wenn man die beschriebene Konstruktion mit einer Ellipse statt mit einem Kreis ausführt, bekommt man keine Hyperbel (obwohl die entstehende Kurve so ähnlich aussieht).

Lösung: Es sei $K=a\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$. Die Kreistangente durch K hat dann die Gleichung $X\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}=a$; sie schneidet die x–Achse in $D=\begin{pmatrix}a/\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$. Wegen $DK=a\cdot\tan\varphi$ ist $H=a\cdot\begin{pmatrix}1/\cos\varphi\\ \tan\varphi\end{pmatrix}$; die Hyperbel ist also rechtwinklig.

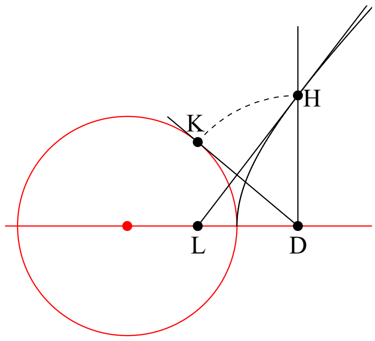
Andere Lösung: Es sei $H=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, also $D=\begin{pmatrix}x\\ 0\end{pmatrix}$. Nach dem Satz von Pythagoras ist $DK^2=x^2-a^2$, also gilt wegen $DK^2=DH^2=y^2$ auch $y^2=x^2-a^2$ und damit $x^2-y^2=a^2$.

Zur Warnung: Zum Ellipsenpunkt $\begin{pmatrix}a\cdot\cos\varphi\\ b\cdot\sin\varphi\end{pmatrix}$ gehört der Kurvenpunkt

$\frac{1}{\cos\varphi}\cdot\begin{pmatrix}a\\ \sin\varphi\cdot\sqrt{a^2\cdot\sin^2\varphi+b^2\cdot\cos^2\varphi}\end{pmatrix}$, woraus nach Elimination von φ die Kurvengleichung $x^4-x^2\cdot y^2-2\cdot x^2\cdot a^2+x^2\cdot b^2+a^4-a^2\cdot b^2=0$ folgt.

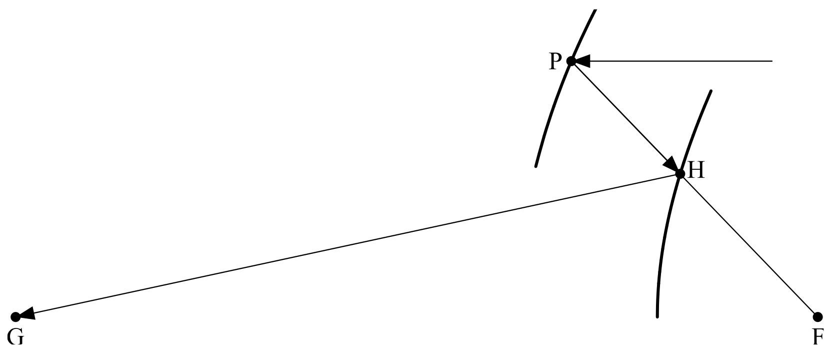
3.9.1b: Es sei L das Lot von K auf die x–Achse. Dann ist LH die Hyperbeltangente zu H.

Lösung: Mit den Bezeichnungen der 1. Lösung zu **3.9.1** ist $L=\begin{pmatrix}a\cdot\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$, und die zu $H=a\cdot\begin{pmatrix}1/\cos\varphi\\ \tan\varphi\end{pmatrix}$ gehörige Tangente hat die Gleichung $x-y\cdot\sin\varphi=a\cdot\cos\varphi$.



3.10 Eine Anwendung

3.10.1: F und G seien zwei feste Punkte. Ein beliebiger achsenparalleler Strahl soll bei P in Richtung F reflektiert werden; vor Erreichen von F soll er abermals bei H in Richtung G reflektiert werden. Auf welcher Kurve liegt P? Auf welcher Kurve liegt H? Wozu kann man die gesamte Anordnung verwenden?

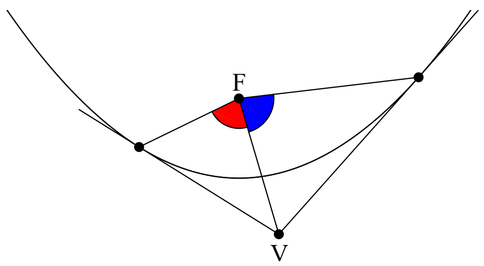


Lösung: P liegt auf einer Parabel mit dem Brennpunkt F. H liegt auf einer Hyperbel mit den Brennpunkten F und G. Kann aus irgendwelchen Gründen der Empfänger nicht bei F sein, so lässt sich mit dieser Anordnung der Brennpunkt verlegen.

4. Anhang A: Zwei Sätze von PONCELET

Es handelt sich um die beiden Zwei-Tangenten-Sätze. Der erste macht Aussagen über einen Brennpunkt, der zweite über zwei Brennpunkte.

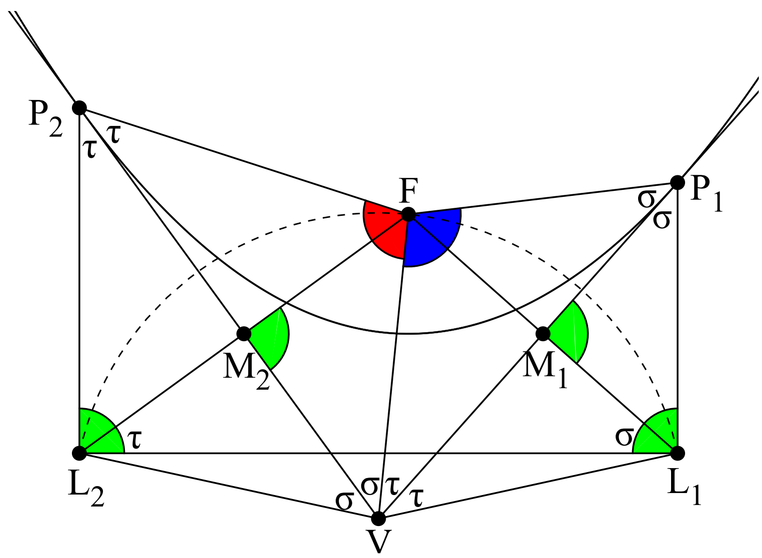
Satz 1 von PONCELET:



Zwei Parabeltangenten schneiden sich in V.

Die Abschnitte zwischen jeweiligem Berührpunkt und V werden von F aus unter gleichem Winkel gesehen, d.h. rot = blau.

Begründung:



Spiegelt man F an den Tangenten, gelangt man zu L_1 und L_2 auf der Leitgeraden.

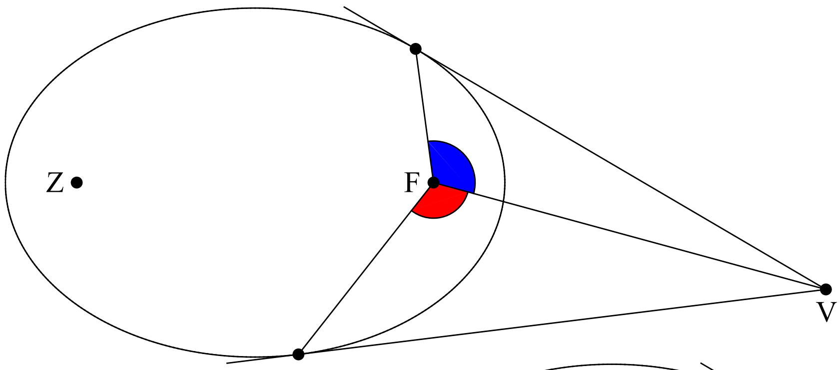
M_1 ist Mittelpunkt von FL_1, analog M_2.

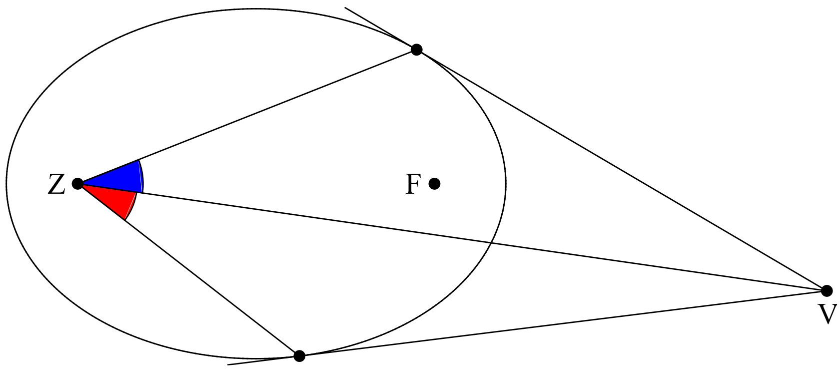
Die grünen Winkel sind recht.

Die Winkel σ bei P_1 sind gleich wegen der Spiegelung. Wegen Komplementbildung zu 90° tritt σ auch bei L_1 auf. Nach dem Umfangswinkelsatz (Sehne L_2F) ist $\sphericalangle(L_2, V, F) = 2 \cdot \sigma$; dieser Winkel wird von der Mittelsenkrechten zu L_2F halbiert.

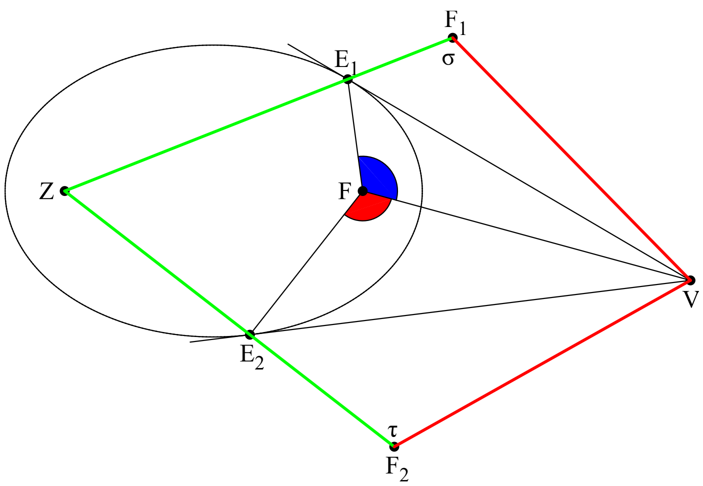
Analog argumentiert man mit den Winkeln τ. Im Dreieck VFP_2 ist $\text{rot} + \sigma + \tau = 180°$, und im Dreieck VP_1F ist $\text{blau} + \sigma + \tau = 180°$. Daher ist rot = blau.

Zwei Ellipsentangenten schneiden sich in V. Dann werden die Abschnitte zwischen den jeweiligen Berührpunkten und V von jedem Brennpunkt aus unter gleichem Winkel gesehen, d.h. rot = blau.





Begründung des ersten Teils:

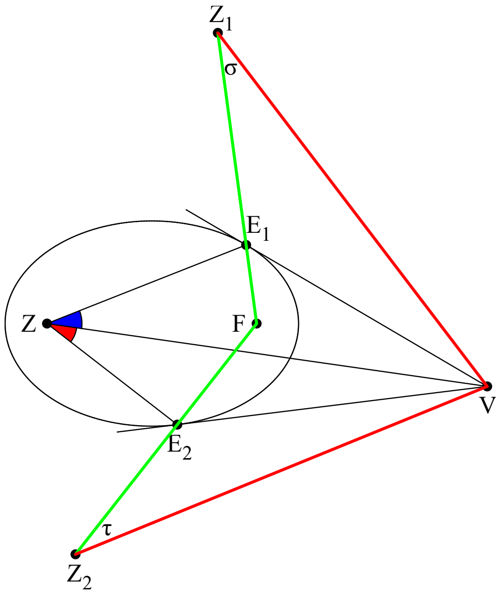


Spiegelt man F an der Tangente zu E_1, erhält man F_1 auf dem Leitkreis um Z.

Spiegelt man F an der Tangente zu E_2, erhält man F_2 auf dem Leitkreis um Z.

Die grünen Strecken haben also gleiche Länge, die roten wegen der Spiegelungen auch, sodass ein zu ZV symmetrischer Drachen entsteht mit $\sigma = \tau$. Wegen der Spiegelungen stimmt der blaue Winkel mit σ überein und der rote mit τ.

Begründung des zweiten Teils:

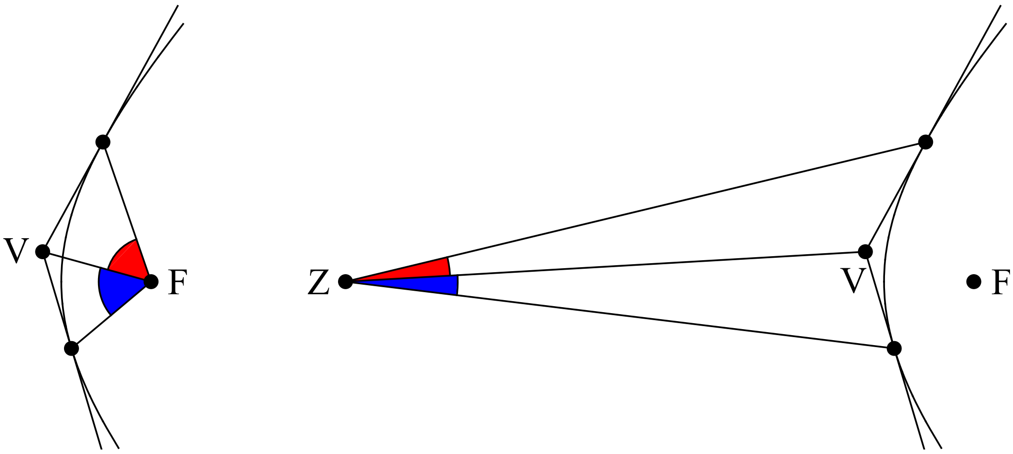


Spiegelt man Z an der Tangente zu E_1, erhält man Z_1 auf dem Leitkreis um F.

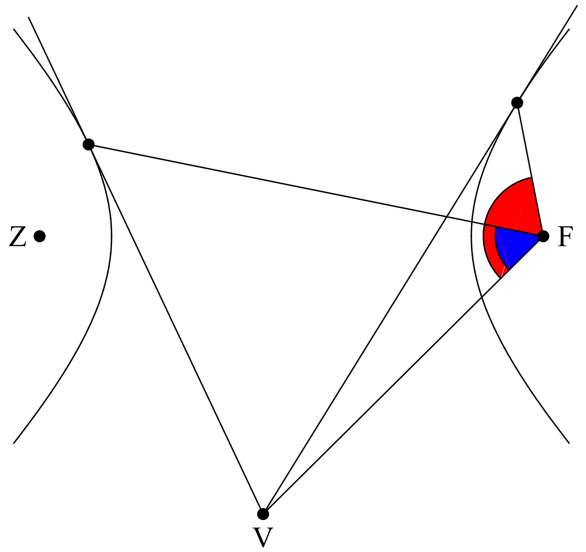
Spiegelt man Z an der Tangente zu E_2, erhält man Z_2 auf dem Leitkreis um F.

Die grünen Strecken haben also gleiche Länge, die roten wegen der Spiegelungen auch, sodass ein zu ZV symmetrischer konkaver Drachen entsteht mit $\sigma = \tau$. Wegen der Spiegelungen stimmt der blaue Winkel mit σ überein und der rote mit τ.

Zwei zum gleichen Ast gehörige Hyperbeltangenten schneiden sich in V. Dann werden die Abschnitte zwischen den jeweiligen Berührpunkten und V von jedem Brennpunkt aus unter gleichem Winkel gesehen, d.h. rot = blau.

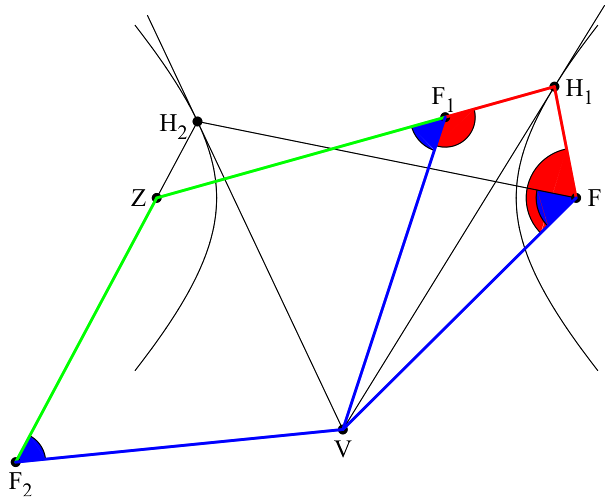


Die Begründung ist zum Ellipsenfall analog.



Zwei zu verschiedenen Ästen gehörige Hyperbeltangenten schneiden sich in V. Dann ist es nicht so, dass die Abschnitte zwischen den jeweiligen Berührpunkten und V von jedem Brennpunkt aus unter gleichem Winkel gesehen werden.

Klärung des Zusammenhangs zwischen rot und blau:



F_1 entsteht aus F durch Spiegelung von F an der Tangente zu H_1.

F_2 entsteht aus F durch Spiegelung von F an der Tangente zu H_2.

Dadurch entstehen drei Drachen:

F_1 und F_2 liegen auf dem Leitkreis um Z, daher haben die grünen Strecken gleiche Länge.

Die Längen der blauen Strecken ist egen der spiegelungen gleich.

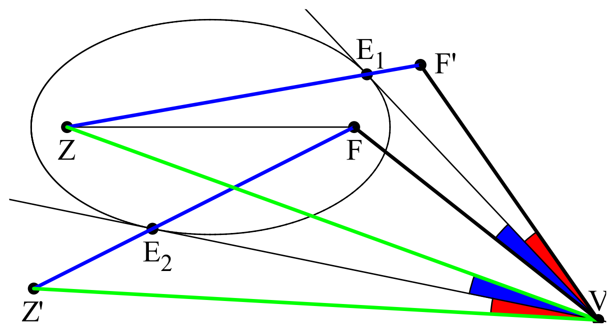
Der Drachen VFH_1F_1 hat VH_1 als Symmetrieachse, so dass die roten Winkel bei F und bei F_1 übereinstimmen.

Der Drachen VFH_2F_2 hat VH_2 als Symmetrieachse, so dass die blauen Winkel übereinstimmen.

Der Drachen VF_1ZF_2 hat VZ als Symmetrieachse, daher stimmen die blauen Winkel bei F_1 und F_2 überein.

Daher erkennt man an F_1, dass rot + blau =180° gilt.

Satz 2:



Zwei Ellipsentangenten schneiden sich in V. Dann haben die blauen Winkel $\sphericalangle(F, V, E_1)$ und $\sphericalangle(E_2, V, Z)$ gleiche Größe:

Spiegelt man F an der Tangente zu E_1, bekommt man F'. F' liegt auf dem Leitkreis um Z mit dem Radius r.

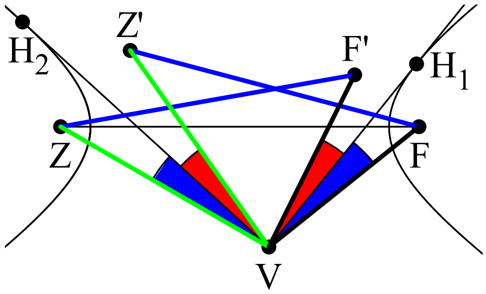
Spiegelt man Z an der Tangente zu E_2, bekommt man Z'. Z' liegt auf dem Leitkreis um F mit dem Radius r.

Die Dreiecke VF'Z und VFZ' sind daher zueinander kongruent.

In VF'Z hat der Winkel bei V die Größe weiß + blau + rot.

In VFZ' hat der Winkel bei V auch die Größe weiß + blau + rot.

Daher sind alle gefärbten Winkel alle gleich groß, woraus die Behauptung folgt.



Zwei Hyperbeltangenten schneiden sich in V.

Dann sind die blauen Winkel gleich groß:

Z wird an der Tangente zu H_2 gespiegelt mit dem Ergebnis Z'. F wird an der Tangente zu H_1 gespiegelt mit dem Ergebnis F'.

Z' liegt auf dem Leitkreis um F mit dem Radius r. F' liegt auf dem Leitkreis um Z mit dem Radius r.

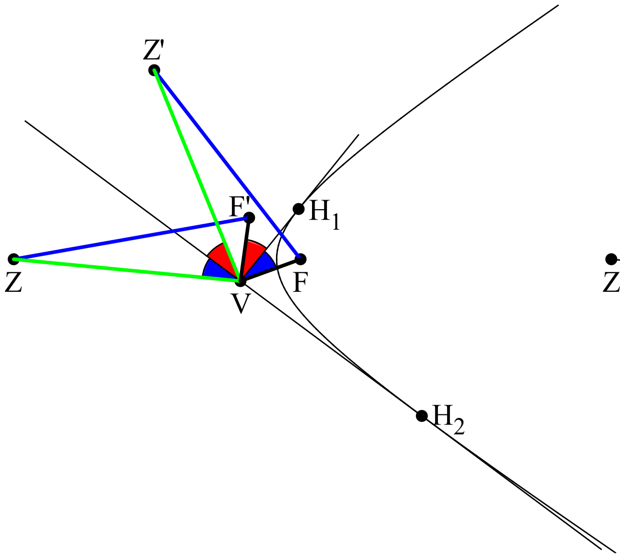
Daher haben die blauen Strecken gleiche Länge, und die Dreiecke ZVF' und VFZ' sind zueinander kongruent.

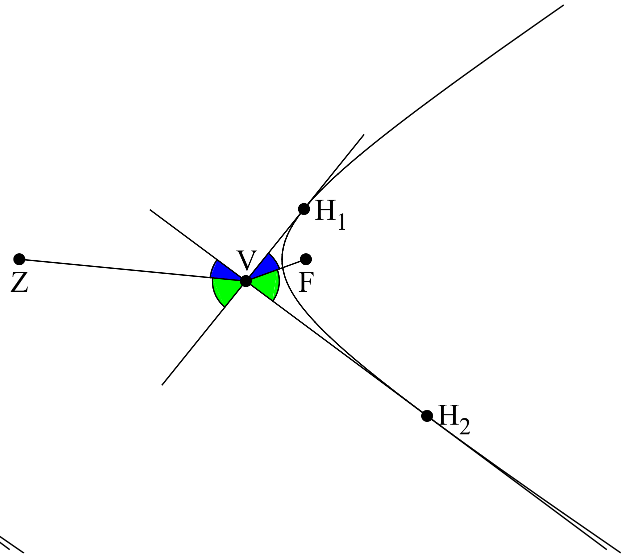
Der Winkel bei V im Dreieck ZVF' ist blau + rot + weiß; der Winkel bei V im Dreieck VFZ' ist weiß + rot + blau.

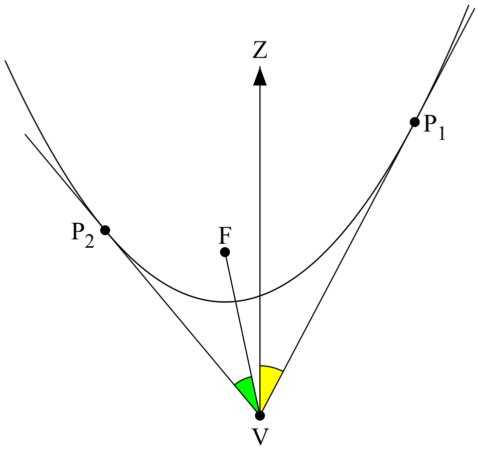
Daher sind alle gefärbten Winkel gleich groß. Das beweist die Aussage.

Gehören beide Hyperbeltangenten zum gleichen Ast, so liefert die eben dargestellte Argumentation das Ergebnis, dass in der Graphik unten links die gefärbten Winkel alle die gleiche Größe haben, insbesondere auch die blauen.

Unten rechts wird das Ergebis ohne die Beweis-Hilfslinien übersichtlich dargestellt. Analog sind unten rechts auch die grünen Winkel gleich groß.



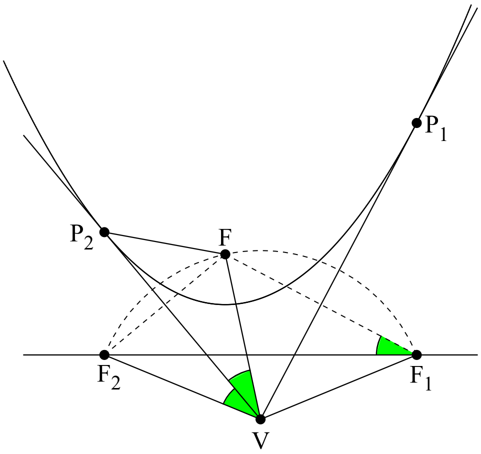


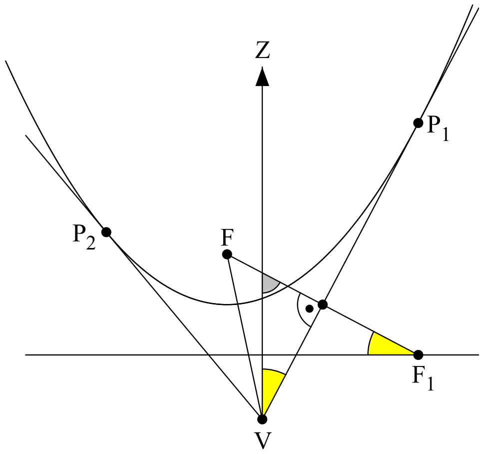


Zwei Parabeltangenten schneiden sich in V.

VZ sei parallel zur Parabelachse.

Der grüne Winkel $\sphericalangle(P_2, V, F)$ und der gelbe Winkel $\sphericalangle(Z, V, P_1)$ haben gleiche Größe.





Spiegelt man F an den Tangenten, bekommt man F_1 und F_2. Daher haben die beiden grünen Winkel bei V gleiche Größe, und F, F_1 und F_2 haben von V gleichen Abstand. Die beiden Spiegelpunkte liegen auf der Leitgerade.

Nachdem Umfangswinkelsatz (Sehne F_2F) tritt der grüne Winkel auch bei F_2 auf.

Rechts ist stets gelb + grau = 90°, daher tritt der gelbe Winkel bei V auch bei F_1 auf.

Dies beweist die Aussage.

5. Anhang B: Alternativer Zugang über Leitgeraden

Eine andere Verallgemeinerung der Parabel ist die folgende:

Was kann man über alle Punkte P sagen, deren Abstand zu dem festen Brennpunkt F ε-mal so groß ist wie der Abstand zu der festen Leitgeraden g?

Wir setzen $P=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon\cdot c \end{pmatrix}$, $g: y=\frac{c}{\varepsilon}$. Dann muss für $\varepsilon\neq 1$ sein:

$$x^2+(y-c\cdot\varepsilon)^2=\varepsilon^2\cdot\left(y-\frac{c}{\varepsilon}\right)^2$$

$$x^2+y^2-2\cdot y\cdot c\cdot\varepsilon+c^2\cdot\varepsilon^2=\varepsilon^2\cdot y^2-2\cdot y\cdot c\cdot\varepsilon+c^2$$

$$x^2+\left(1-\varepsilon^2\right)\cdot y^2=\left(1-\varepsilon^2\right)\cdot c^2$$

$$\frac{x^2}{1-\varepsilon^2}+y^2=c^2$$

Ist $0<\varepsilon<1$ (Ellipse), hat man eine Gleichung vom Typ $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$.

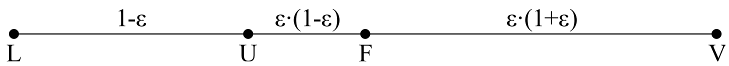
Ist $\varepsilon>1$ (Hyperbelhat man eine Gleichung vom Typ $-\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$.

L durchlaufe die Leitgerade. Der Kurvenpunkt X liegt auf der Senkrechten zu g durch L.

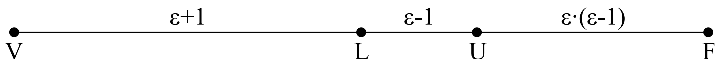
Wie konstruiert man Punkte X, deren Abstand zu F ε-mal so groß ist wie der Abstand zu L?

Auf FL liegen die Punkte U und V mit $\varepsilon=\frac{|UF|}{|UL|}=\frac{|VF|}{|VL|}$, und alle anderen Punkte X mit $\varepsilon=\frac{|XF|}{|XL|}$ liegen auf dem Thaleskreis über UV (Apollonius-Kreis). Stets ist $U=\frac{\varepsilon\cdot L+F}{\varepsilon+1}$ und $U=\frac{\varepsilon\cdot L-F}{\varepsilon-1}$.

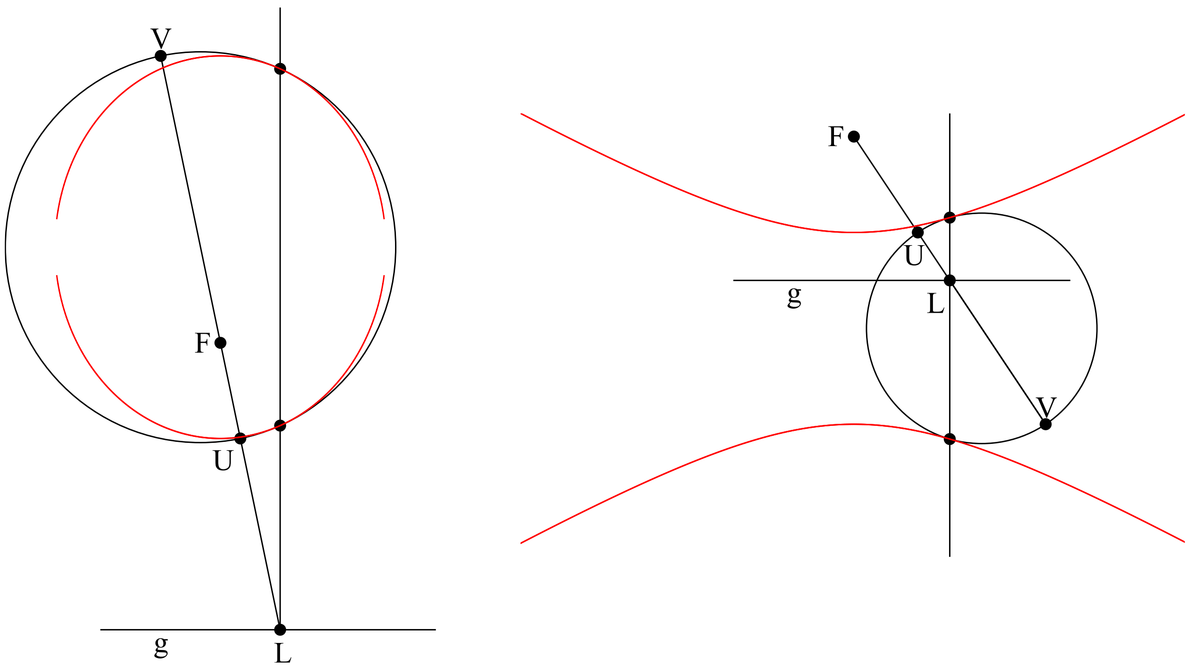
Für $0<\varepsilon<1$ hat man die nebenstehende Situation.



Für $1<\varepsilon$ hat man die nebenstehende Situation.



Man erkennt in der folgenden Graphik rechts die rote Hyperbel und links die rote Ellipse, die sich nur dann ganz schließen würde, wenn L nach links und nach rechts „ins Unendliche“ wandern würde.



6. Anhang C: Ein zweiter Weg zu den Gleichungen

Hier werden Ellipsen und Hyperbeln gemeinsam behandelt.

Wieder sei $F=\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$, $Z=\begin{pmatrix} -f \\ 0 \end{pmatrix}=-F$. Mit $C:=\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ ist $K=Z+r\cdot C=-F+2\cdot a\cdot C$ ein allgemeiner Punkt des Leitkreises. Der Ellipsen- bzw. Hyperbelpunkt X liegt auf der Geraden $ZK: X=-F+\lambda\cdot C$ und der

Mittelsenkrechten zu KF mit der Gleichung $X\cdot(K-F)=\frac{K+F}{2}\cdot(K-F)$ bzw.

$X\cdot 2\cdot(-F+a\cdot C)=\frac{K^2-F^2}{2}=\frac{F^2-4\cdot a\cdot C\cdot F+4\cdot a^2-F^2}{2}=2\cdot a\cdot(-C\cdot F+a)$, was auf

$(-F+\lambda\cdot C)\cdot(-F+a\cdot C)=a\cdot(-C\cdot F+a)$ und damit auf $\lambda=\frac{a^2-f^2}{a-f\cdot\cos\varphi}$ führt.

Bei der Hyperbel ist $f>a$, so dass es für $\cos\varphi=\frac{a}{f}$ keinen Kurvenpunkt gibt.

Es ist $\boxed{f^2=a^2+\chi\cdot b^2}$ mit $\chi=-1$ bei der Ellipse und $\chi=1$ bei der Hyperbel. Damit ist $\lambda=\frac{-\chi\cdot b^2}{a-f\cdot\cos\varphi}$

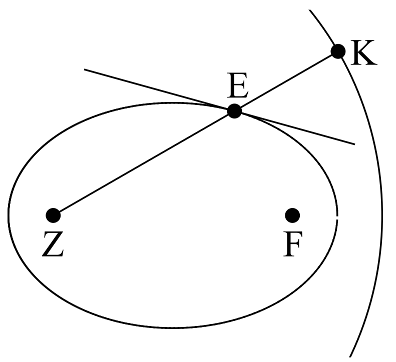
und deshalb $X=-F+\frac{-\chi\cdot b^2}{a-f\cdot\cos\varphi}\cdot C=\frac{(a-f\cdot\cos\varphi)\cdot\begin{pmatrix}-f\\0\end{pmatrix}-\chi\cdot b^2\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix}}{a-f\cdot\cos\varphi}=\boxed{\frac{\begin{pmatrix}-a\cdot f+a^2\cdot\cos\varphi\\-\chi\cdot b^2\cdot\sin\varphi\end{pmatrix}}{a-f\cdot\cos\varphi}=X}$.

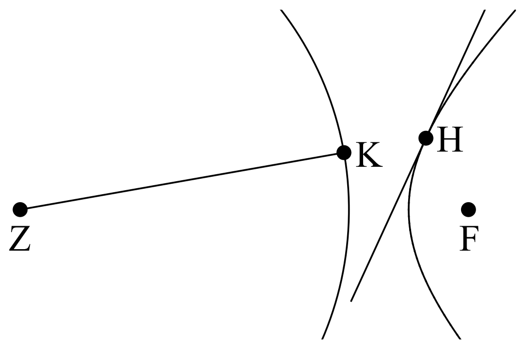
Schreibt man $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, so ist

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\chi\cdot\left(\frac{y}{b}\right)^2=\frac{(-f+a\cdot\cos\varphi)^2-\chi\cdot b^2\cdot\sin^2\varphi}{(a-f\cdot\cos\varphi)^2}$$
$$=\frac{f^2-2\cdot a\cdot f\cdot\cos\varphi+a^2\cdot\cos^2\varphi-\chi\cdot b^2+\chi\cdot b^2\cdot\cos^2\varphi}{a^2-2\cdot a\cdot f\cdot\cos\varphi+f^2\cdot\cos^2\varphi}=1$$

Es folgt die Ellipsengleichung $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$ bzw. die Hyperbelgleichung $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$.

Bei Ellipse und Hyperbel ist die Mittelsenkrechte von F und $K=-F+2\cdot a\cdot C$ mit $C=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix}$ Tangente in E bzw. in H. Die Normale ist $K-F=-2\cdot F+2\cdot a\cdot C$, und sie geht durch $M=\frac{K+F}{2}=a\cdot C$.





Der Abstand von F zur Tangente beträgt $\frac{|KF|}{2}$.

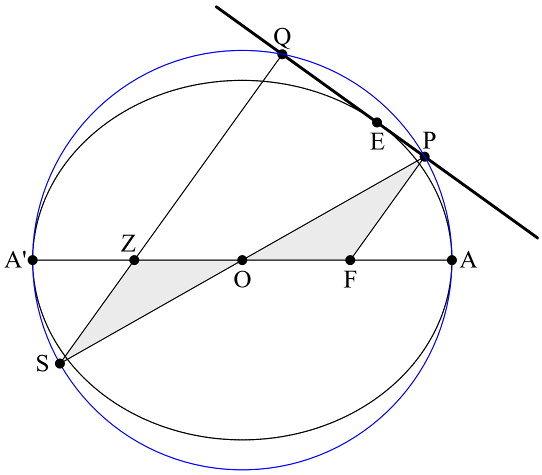
Der Abstand von $Z=-F$ zur Tangente beträgt (HESSE'sche Normalenform !!)

$\frac{(-F-M)\cdot(K-F)}{|K-F|}=-2\cdot\frac{(F+a\cdot C)\cdot(a\cdot C-F)}{|K-F|}=-2\cdot\frac{a^2-f^2}{|K-F|}=-2\cdot\frac{-\chi\cdot b^2}{|K-F|}$.

Der Absolutbetrag des Produkts der Abstände beträgt daher $\boxed{\left||tF|\cdot|tZ|\right|=b^2}$.

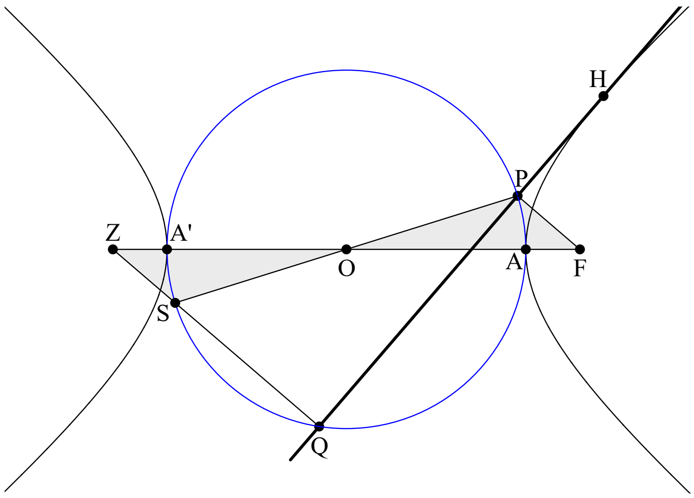
Wie kann man das synthetisch für die Ellipse beweisen? Die Lotfußpunkte vP und Q von F und Z auf der Tangente liegen auf dem (blauen) Scheitelkreis um O, dem „Mittelpunkt“ der Ellipse.

Zu zeigen ist $|ZQ|\cdot|FP|=b^2$ mit den Brennpunkten $Z=\begin{pmatrix}-f\\0\end{pmatrix}$ und $F=\begin{pmatrix}f\\0\end{pmatrix}$. Mit $A'=\begin{pmatrix}-a\\0\end{pmatrix}$ und $A=\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$



als West- und Ostpol der Ellipse schreibt sich die rechte Seite als $b^2=a^2-f^2=(a-f)\cdot(f+a)=|A'Z|\cdot|ZA|$. Hier liegt die Verwendung des Sehnensatzes $|A'Z|\cdot|ZA|=|SZ|\cdot|ZQ|$ nahe.

Was kann man über S sagen? S liegt auf ZQ. Liegt S auch auf PO, ist $|PF|=|SZ|$, da O die Strecke ZF halbiert,, und die getönten Dreiecke sind zueinander kongruent. Insbesondere ist $|OP|=|OS|$, so dass S tatsächlich auf dem Scheitelkreis liegt. Wegen $|SZ|=|FP|$ folgt $b^2=|A'Z|\cdot|ZA|=|SZ|\cdot|ZQ|=|FP|\cdot|ZQ|$.



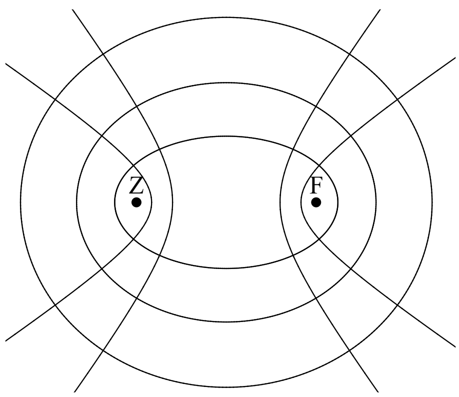
Die Argumentation bei der Hyperbel verläuft analog: S ist wieder Schnittpunkt von ZQ mit OP, die getönten Dreiecke sind zueinander kongruent, und S liegt daher auf dem (blauen) Scheitelkreis.

Nach dem Sehnen-Tangentensatz ist

$$\begin{aligned}|ZQ|\cdot|PF|&=|ZQ|\cdot|ZS|=|ZA'|\cdot\left||ZA|\right|\\&=(f-a)\cdot(f+a)\\&=f^2-a^2=b^2\end{aligned}$$

7. Anhang D: Konfokale Kegelschnitte

Wegen $f^2=a^2-b^2$ haben die Ellipsen zu $\frac{x^2}{a^2+k}+\frac{y^2}{b^2+k}=1$ alle dieselben Brennpunkte $\begin{pmatrix}\pm\sqrt{a^2-b^2}\\0\end{pmatrix}$ und heißen daher <u>konfokal</u>.



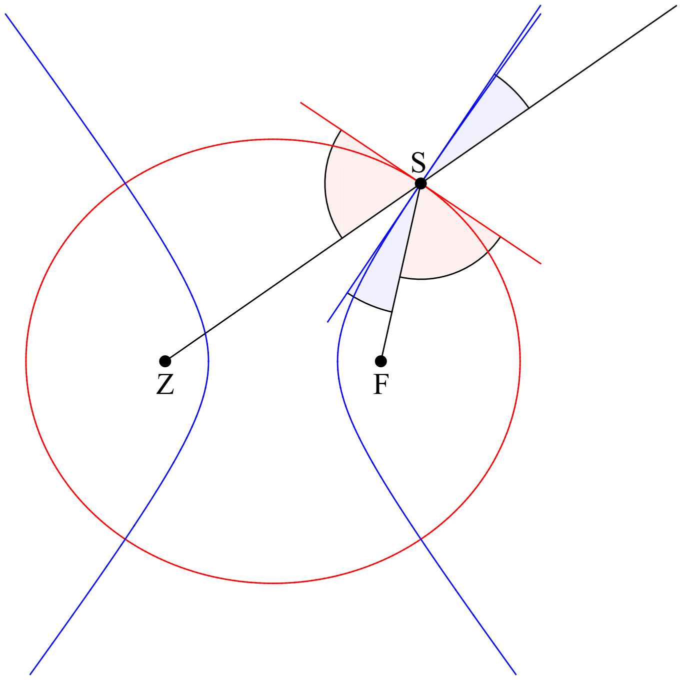
Ist $b^2<k<a^2$, so beschreibt $\frac{x^2}{a^2-k}+\frac{y^2}{b^2-k}=1$ eine Hyperbel mit den denselben Brennpunkten.

Die Ellipsen schneiden sich mit den Hyperbeln stets rechtwinklig, denn:

Beim Schnittpunkt S haben die beiden roten Winkel gleiche Größe. Das gilt auch für die blauen Winkel.

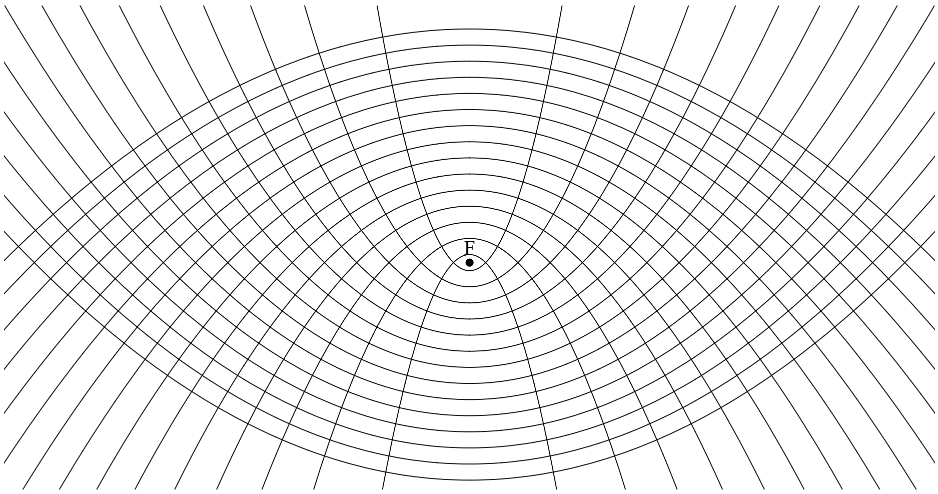
An der roten Ellipsentangente sind zwei blaue und zwei rote Winkel, daher ist blau + rot = 90°.

Auch an der blauen Hyperbeltangente sind zwei blaue und zwei rote Winkel.



Natürlich gibt es auch konfokale Parabeln.

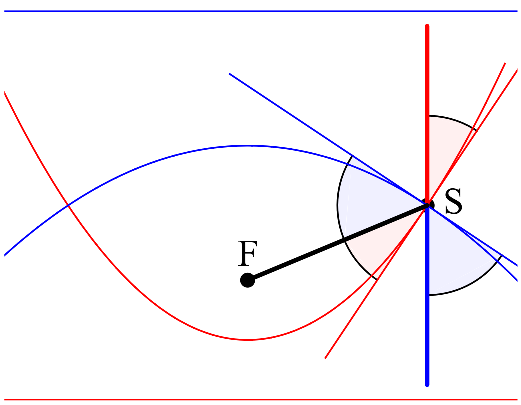
Da die Leitgerade fast beliebig gewählt werden kann, ist ein einschränkendes Element erforderlich, das hier darin besteht, dass die Leitgeraden zueinander parallel sein sollen.



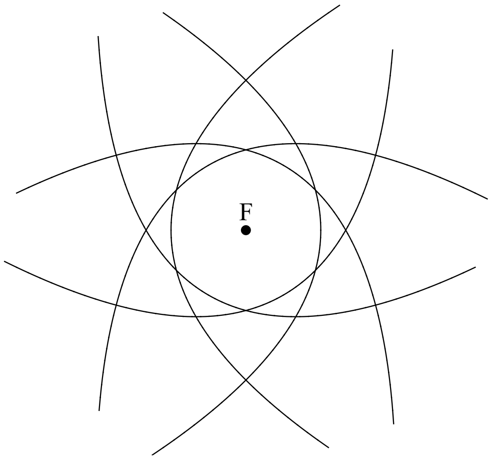
Die rote Parabel (mit roter Leitgerade) und die blaue Parabel (mit blauer Leitgerade) mögen sich in S schneiden. Der dicke rote von oben kommende Strahl wird in S hin zu F reflektiert. Der dicke blaue von unten kommende Strahl wird in S auch hin zu F reflektiert. Gleichfarbige Winkel haben gleiche Größe.

Sowohl an der blauen als auch an der roten Tangente liegen jeweils zwei blaue und zwei rote Winkel, so dass blau + rot = 90° ist.

Die Parabeln schneiden sich daher orthogonal.



Hätte man als einschränkendes Element gefordert, dass alle Leitgeraden zu F denselben Abstand haben sollen, hätte man ein weniger interessantes Resultat bekommen.



8. Anhang E: Elliptisches Billard

Ein Strahl durch einen der Brennpunkte einer Ellipse wird an der Ellipsen-Innenwand so reflektiert, dass er anschließend durch den anderen Brennpunkt geht.

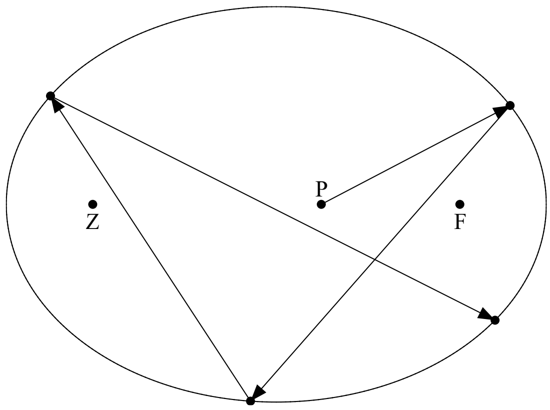
Was ist mit anderen Strahlen? Will man das experimentell ermitteln, so ist es ggf. hilfreich zu wissen, dass eine Gerade mit der Steigung m durch den Ellipsenpunkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ die Ellipse mit der Gleichung

$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ wieder im Punkt $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ mit $x_1 = -\frac{2 \cdot a^2 \cdot m \cdot y0 + \left(b^2 - a^2 \cdot m^2\right) \cdot x_0}{a^2 \cdot m^2 + nn^2}$ und

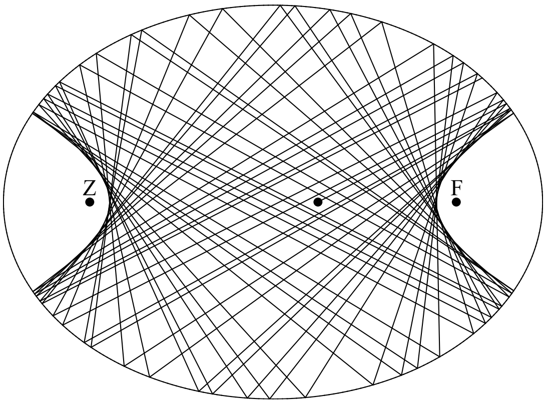
$y_1 = m \cdot \left(x_1 - x_0\right) + y_0$ tifft.

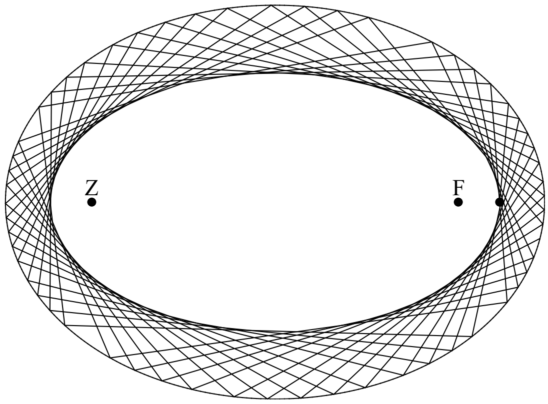
Ein von P ausgehender Strahl wird mehrmals an der Innenwand der Ellipse reflektiert.

Das Bild wird interessanter, wenn man viele Reflexionen betrachtet.

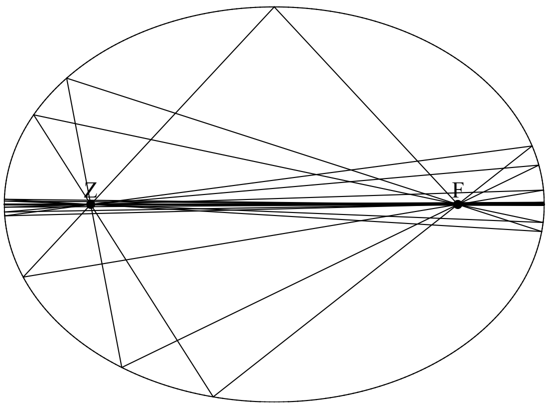


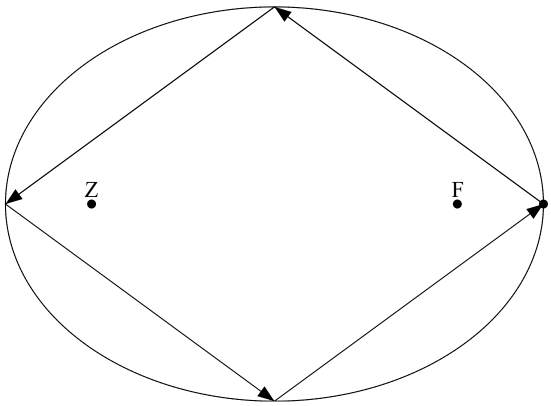
Startet man innerhalb der Brennpunkte, ergibt sich als Hüllkurve offenbar eine Hyperbel; strtat man außerhalb der ellipse, bekommt man offenbar eine Ellipse:





Startet man in einem Brennpunkt, so nähern ich die reflektierten Strahlken immer mehr der längeren Ellipsenachse an. Es kann auch ein geschlossener Polygonzug entstehen (wieder ist der Anfangspunkt als dicker Kreis gekennzeichnet).





Es gibt seit einiger Zeit ein mathematisches Teilgebiet, das sich den (häufig überraschenden) Phänomenen des elliptischen Billards widmet.