Jörg MEYER, Hameln 14. 5. 2024

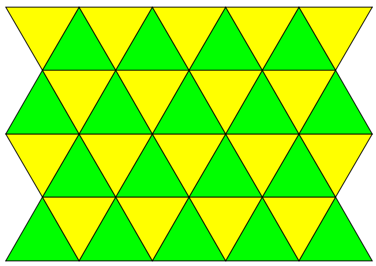
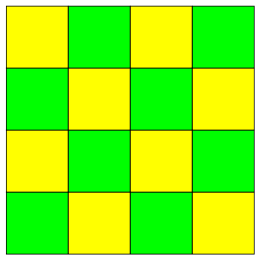
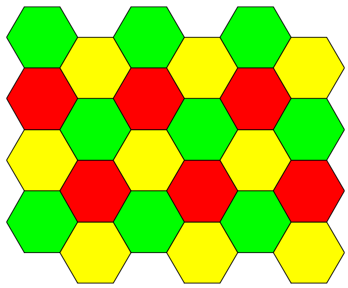
Kachelungen

Inhalt

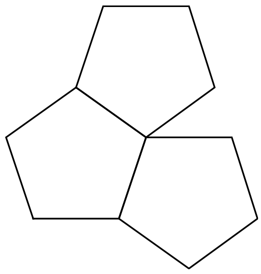
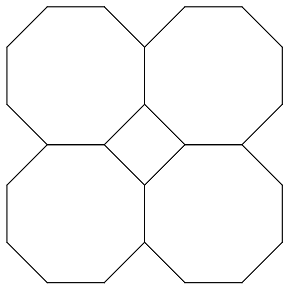
Bis auf den letzten Abschnitt sind alle n-Ecke in diesem Text als regelmäßig vorausgesetzt.

1. Kachelungen mit n-Ecken

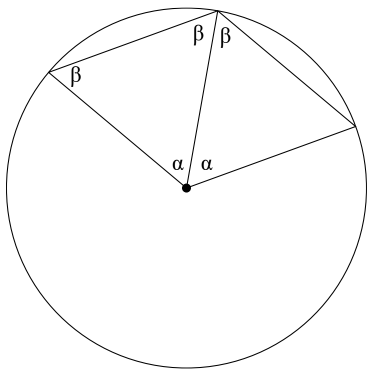
Man kann die Ebene mit 3-Ecken, 4-Ecken oder 6-Ecken kacheln.

Mit 5-Ecken oder 8-Ecken gelingt das nicht.

Die führt zu der Frage: Mit welchen n-Ecken kann man kacheln?



Ein n-Eck besteht aus n Sektoren mit dem Mittelpunktswinkel $\alpha = \frac{360°}{n}$. Der Randwinkel des n-Ecks beträgt $2 \cdot \beta = 180° - \alpha$.

Wenn k Kacheln aneinander stoßen, muss sein:

$$360° = k \cdot (2 \cdot \beta) = k \cdot \left(180° - \frac{360°}{n}\right)$$

$$2 = k \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

$$k = \frac{2 \cdot n}{n-2}$$

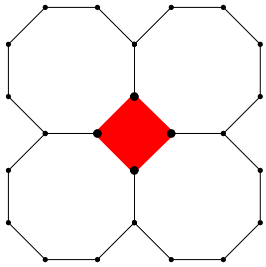
Es muss k ganzzahlig sein. Ersetzt man $n-2$ durch j, so ist $n = 2 + j$ und $k = \frac{2 \cdot n}{n-2} = \frac{2 \cdot (j+2)}{j} = 2 + \frac{4}{j}$.

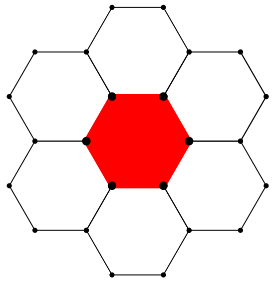
Damit kann j nur die Werte 1 oder 2 oder 4 annehmen.

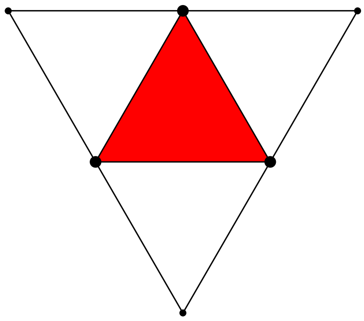
Für $j=1$ ist $n=3$ und $k=6$, für $j=2$ ist $n=4$ und $k=4$, und für $j=4$ ist $n=6$ und $k=3$. Die obigen Kachelmuster sind daher die einzigen.

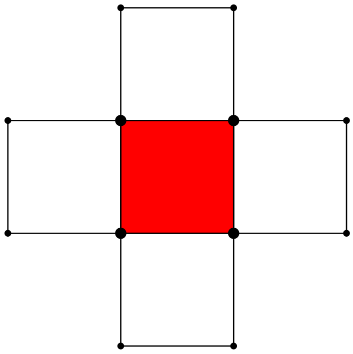
2. Lückenlose Umrandungen von n-Ecken[1]

Oben hat man gesehen, dass ein 4-Eck mit 8-Ecken lückenlos umrandet werden kann oder dass ein 6-Eck mit 6-Ecken lückenlos umrandet werden kann.



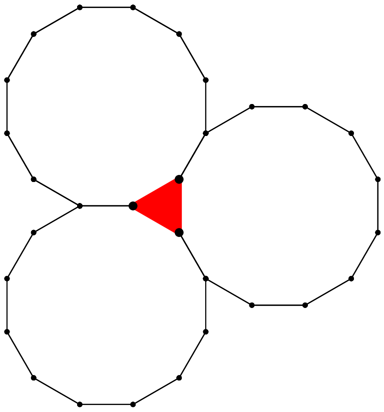


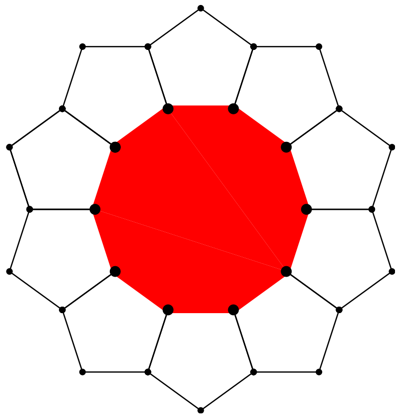




Umrandungen wie die beiden links gelten ***nicht*** als lückenlos, weil die Eckpunkte nicht umrandet sind.

Es ist auch möglich, ein 3-Eck mit 12-Ecken vollständig zu umranden oder ein 10-Eck mit 5-Ecken.

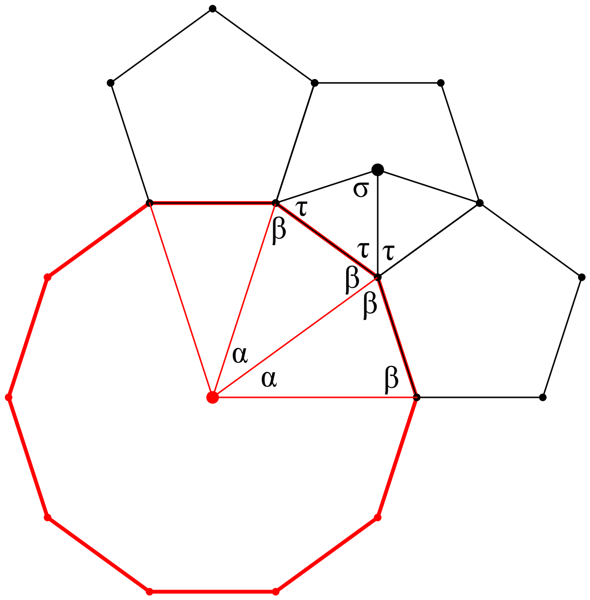




Dies führt zu der Frage: Welche n-Ecke können von k-Ecken lückenlos umrandet werden?

Zum roten n-Eck gehört der Mittelpunktswinkel $\alpha = \frac{360°}{n}$, zum weißen k-Eck gehört der Mittelpunktswinkel $\sigma = \frac{360°}{k}$.

[1] angeregt durch Hans Walser (1923): Vielecke einpacken. In: Der Mathematikunterricht **69**(3), S. 10-17. Die Vorgehensweise hier ist anders.



Mit $2\cdot\beta = 180° - \alpha$ und $2\cdot\tau = 180° - \sigma$ ist

$$180° = \beta + 2\cdot\tau$$

$$= 90° - \frac{180°}{n} + 180° - \frac{360°}{k}$$

Das führt auf

$$k = \frac{4\cdot n}{n-2}.$$

Setzt man $j = n-2$, ist $n = j+2$ und

$$k = \frac{4\cdot(j+2)}{j} = 4 + \frac{8}{j}.$$

Da k ganzzahlig sein muss, kann j nur die Werte 1, 2, 4, 8 annehmen.

Für $j=1$ ist $n=3$ und $k=12$.

Für $j=2$ ist $n=4$ und $k=8$.

Für $j=4$ ist $n=6$ und $k=6$.

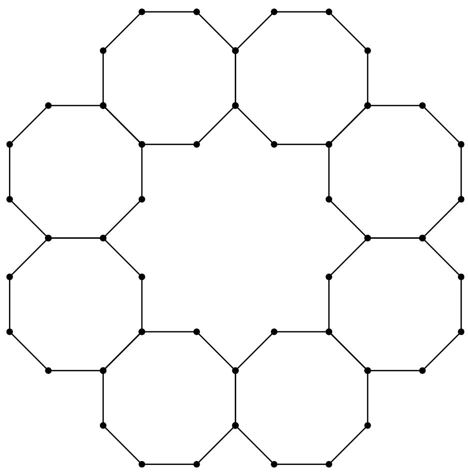
Für $j=8$ ist $n=10$ und $k=5$.

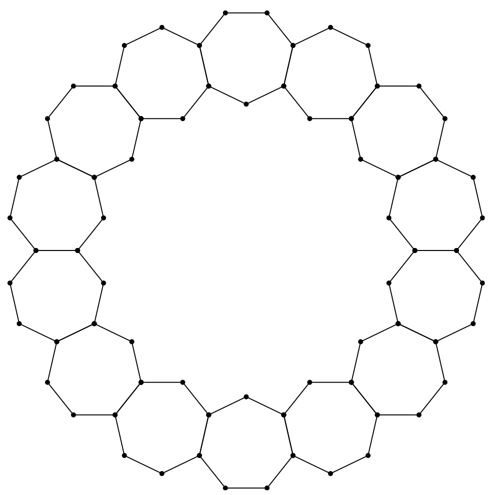
Die gefundenen Umrandungs-Möglichkeiten sind also die einzigen.

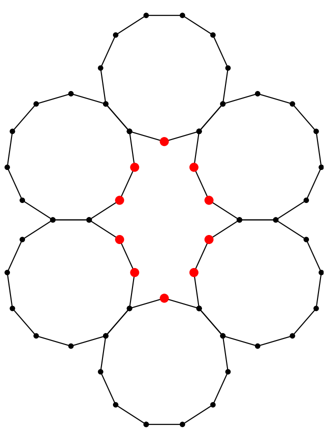
3. Einheitliche Umrandungen als solche

Regelmäßige 8-Ecke können ein unregelmäßiges n-Eck vollständig in einheitlicher Weise umranden. (Das umrandete n-Eck ist unregelmäßig, da nicht alle Randwinkel gleiche Größe haben.)

Auch regelmäßige 7-Ecke eignen sich als Kacheln für eine einheitliche Umrandung.

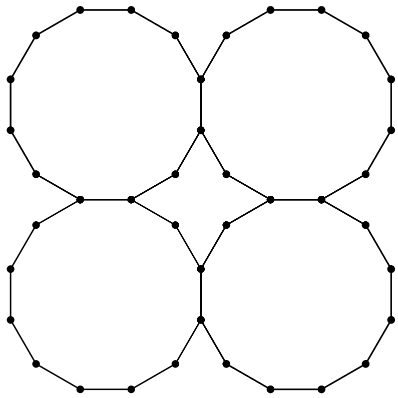


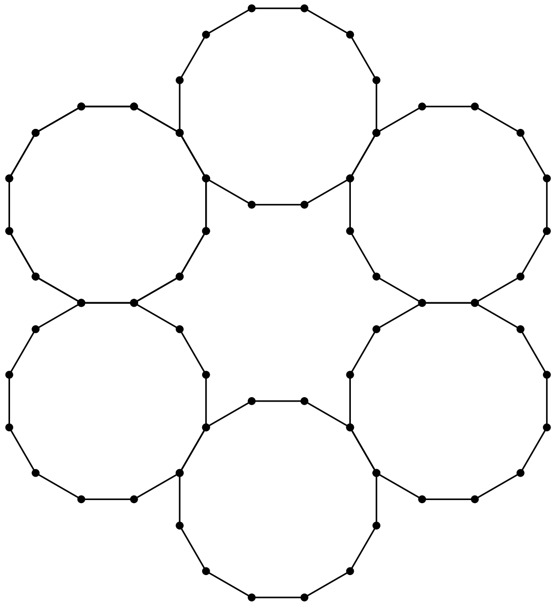




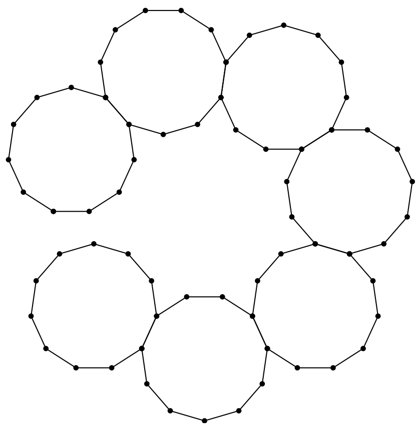
Links sieht man eine vollständige Umrandung, die jedoch ***nicht*** in einheitlicher Weise vorgenommen wurde. Die umrandete Figur ist zwar symmetrisch, aber der Übergang von einer Kachel zur nächst ist ***nicht*** einheitlich, wie man an der Abfolge der roten Punkte erkennen kann.

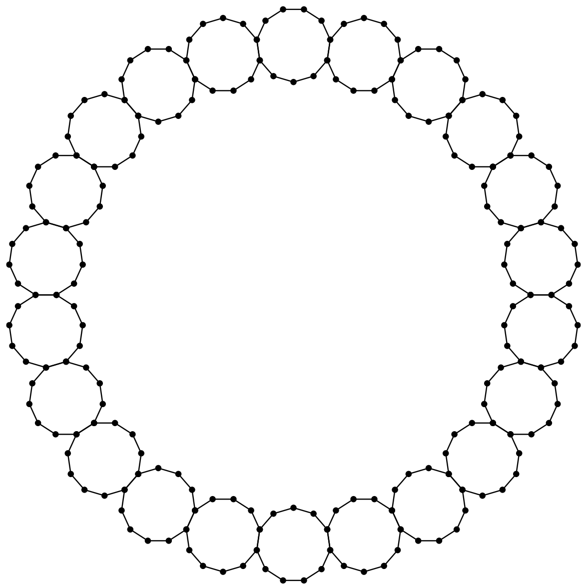
Regelmäßige 12-Ecke können unregelmäßige n-Ecke vollständig in einheitlicher Weise umranden:





Das scheint mit 11-Ecken nicht zu gelingen, jedenfalls nicht beim ersten Versuch:



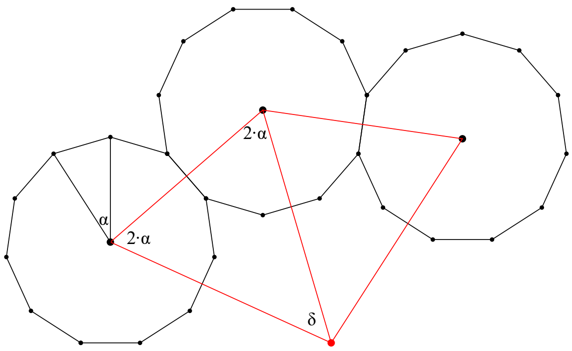


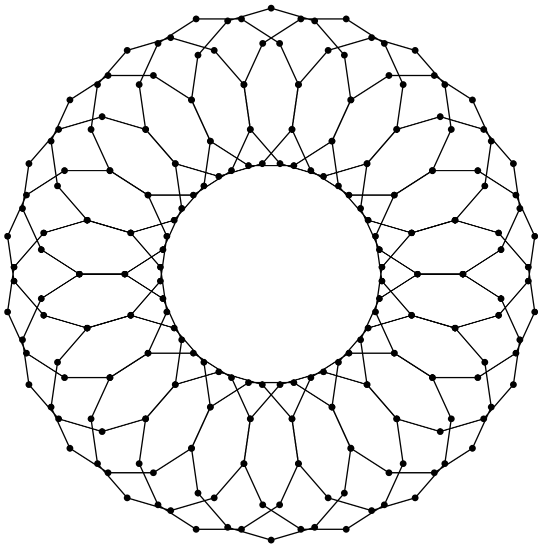
Sehen wir uns das näher an und greifen dafür jeweils 3 sich berührende 11-Ecke heraus. Der Mittelpunktswinkel des 11-Ecks ist $\alpha = \frac{360°}{11}$.

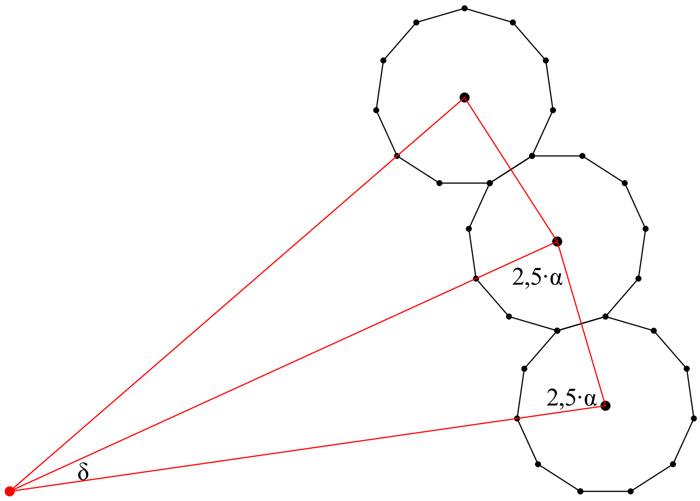
Oben links im nicht gelingenden Fall beträgt der Drehwinkel

$$\delta = 180° - 4 \cdot \alpha = 180° - \frac{4 \cdot 360°}{11} = 360° \cdot \frac{3}{22}.$$

Erst mit 22 Bausteinen hat man ein sich schließendes (und sich überlappendes) Muster.







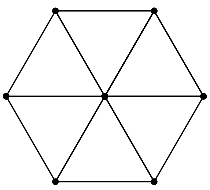
Oben rechts im gelingenden Fall ist der Drehwinkel $\delta = 180° - 5 \cdot \frac{360°}{11} = \frac{360°}{22}$.
Nach 22 Kacheln hat man wieder bei der ersten angekommen.

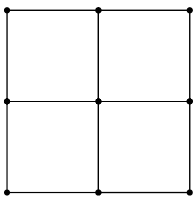
Dies lässt sich auf regelmäßige n-Ecke verallgemeinern. Der Winkel bei den Mittelpunkten der n-Ecke betrage $\frac{m}{2} \cdot \alpha$, also ist der Drehwinkel $\delta = 180° - m \cdot \alpha = 180° - m \cdot \frac{360°}{n} = 360° \cdot \frac{n - 2 \cdot m}{2 \cdot n}$.

Für $m = \frac{n-1}{2}$ ist $\delta = \frac{360°}{2 \cdot n}$, und der Kreis schließt sich. Das ist für ungerade n immer erreichbar.

Bei geradem $n = 2 \cdot k$ ist $\delta = 180° - m \cdot \alpha = 180° - m \cdot \frac{360°}{2 \cdot k} = 360° \cdot \frac{k - m}{2 \cdot k}$ und damit $m = k - 1$ wählbar.

Daher kann man immer ein ringförmiges Kachelmuster aus regelmäßigen n-Ecken erreichen.





Bei 3-Ecken und bei 4-Ecken schrumpft das umrandete Gebiet auf einen Punkt zusammen.