Jörg MEYER, Hameln 14. 5. 2024 / 12.5.2025

Kachelungen

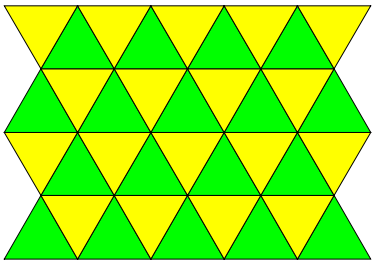
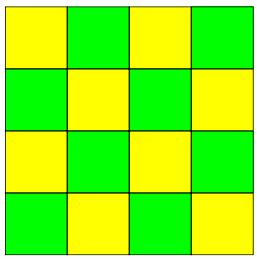
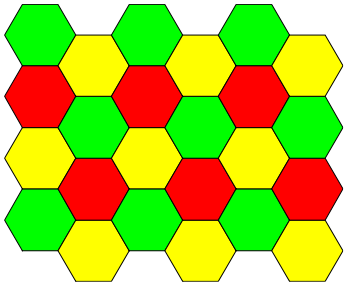
Inhalt

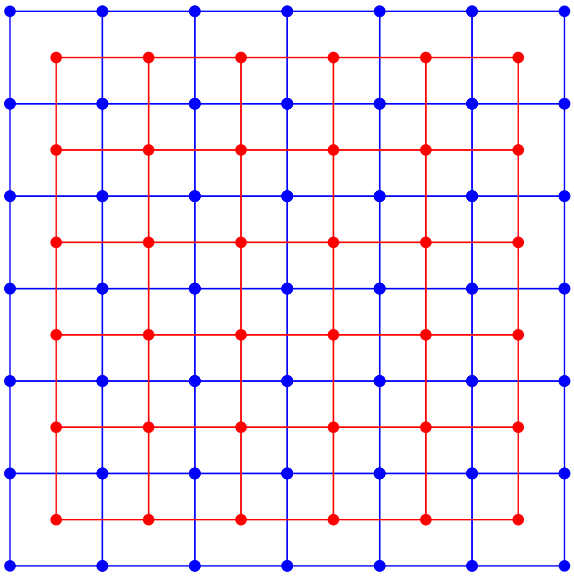
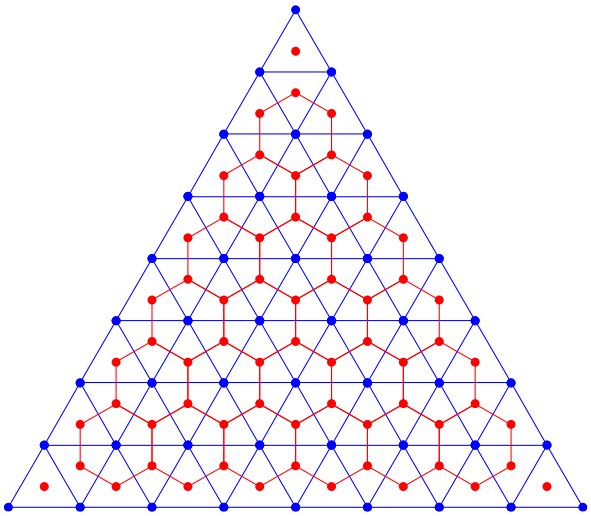
1. Kachelungen mit n-Ecken 1
2. Lückenlose Umrandungen von n-Ecken 2
3. Einheitliche Umrandungen als solche 3

Bis auf den letzten Abschnitt sind alle n-Ecke in diesem Text als regelmäßig vorausgesetzt.

1. Kachelungen mit n-Ecken

Man kann die Ebene mit 3-Ecken, 4-Ecken oder 6-Ecken kacheln.

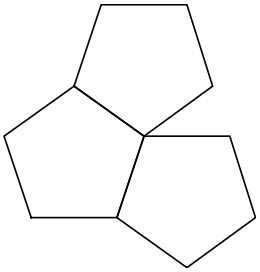
Die roten Mittelpunkte des blauen Quadratmusters bilden ein Quadratmuster.

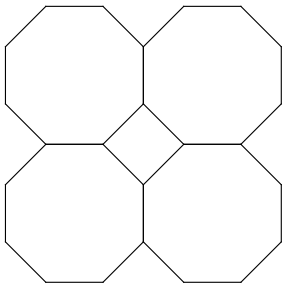
Die blauen Mittelpunkte des roten Quadratmusters bilden ein Quadratmuster.

Die roten Mittelpunkte des blauen Dreickmusters bilden ein Fünfeckmuster.

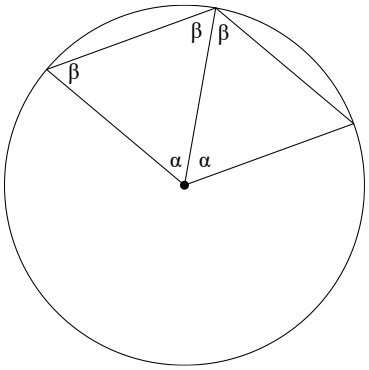
Die blauen Mittelpunkte des roten Fünfeckmusters bilden ein Dreieckmuster.

Mit regelmäßigen 5-Ecken oder regelmäßigen 8-Ecken kann man die Ebene nicht kacheln.





Die führt zu der Frage: Mit welchen regelmäßigen n-Ecken kann man kacheln?



Ein n-Eck besteht aus n Sektoren mit dem Mittelpunktswinkel $\alpha = \frac{360°}{n}$. Der Randwinkel des n-Ecks beträgt $2 \cdot \beta = 180° - \alpha$.

Wenn k Kacheln aneinander stoßen, muss sein:

$$360° = k \cdot (2 \cdot \beta) = k \cdot \left(180° - \frac{360°}{n}\right)$$

$$2 = k \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

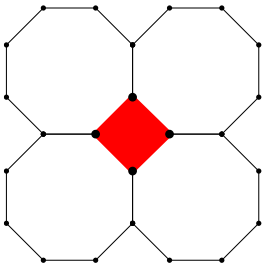
$$(n-2) \cdot (k-2) = 4$$

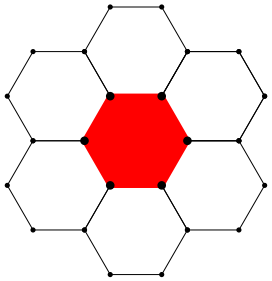
$$\boxed{(n-2) \cdot (k-2) = 4}$$

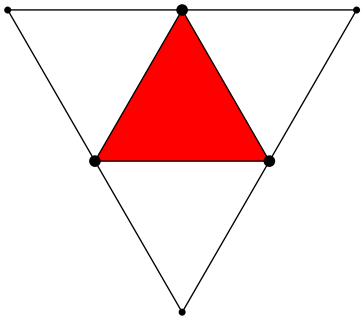
$1 \cdot 4$	$n = 3$	$k = 6$
$4 \cdot 1$	$n = 6$	$k = 3$
$2 \cdot 2$	$n = 4$	$k = 4$

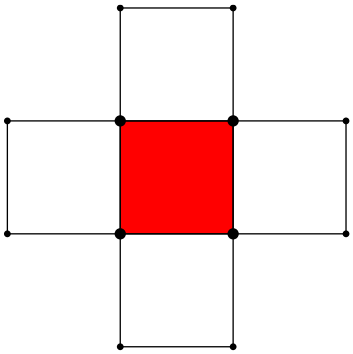
2. Lückenlose Umrandungen von n-Ecken[1]

Oben hat man gesehen, dass ein 4-Eck mit 8-Ecken lückenlos umrandet werden kann oder dass ein 6-Eck mit 6-Ecken lückenlos umrandet werden kann.





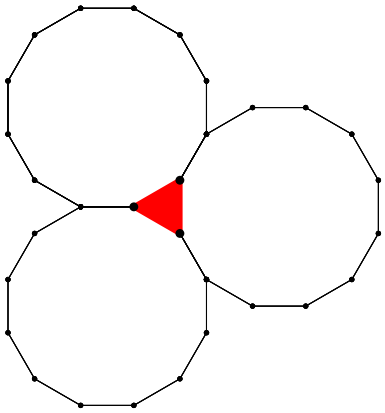


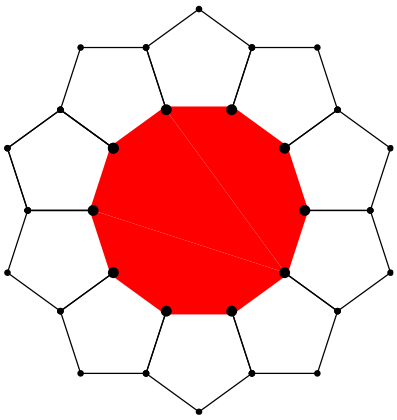


Umrandungen wie die beiden links gelten ***nicht*** als lückenlos, weil die Eckpunkte nicht umrandet sind.

[1] angeregt durch Hans Walser (1923): Vielecke einpacken. In: Der Mathematikunterricht **69**(3), S. 10-17. Die Vorgehensweise hier ist anders.

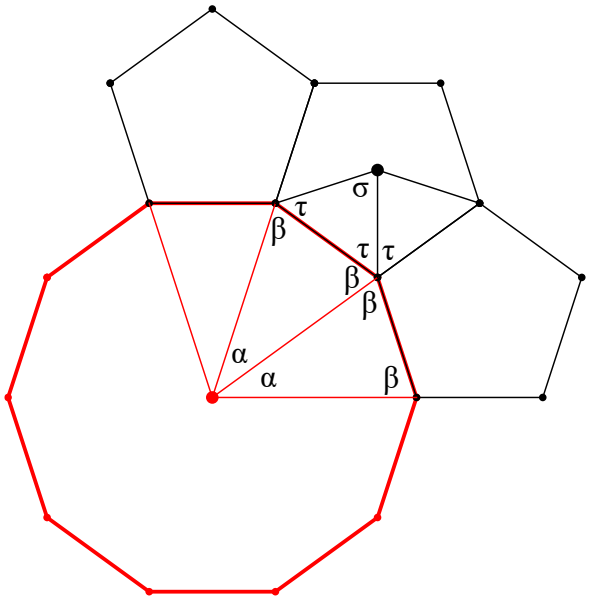
Es ist auch möglich, ein 3-Eck mit 12-Ecken vollständig zu umranden oder ein 10-Eck mit 5-Ecken.





Dies führt zu der Frage: Welche n-Ecke können von k-Ecken lückenlos umrandet werden?

Zum roten n-Eck gehört der Mittelpunktswinkel $\alpha = \frac{360°}{n}$, zum weißen k-Eck gehört der Mittelpunktswinkel $\sigma = \frac{360°}{k}$.



Mit $2 \cdot \beta = 180° - \alpha$ und $2 \cdot \tau = 180° - \sigma$ ist

$$180° = \beta + 2 \cdot \tau$$
$$= 90° - \frac{180°}{n} + 180° - \frac{360°}{k}$$

Das führt auf

$$k = \frac{4 \cdot n}{n-2}.$$

Setzt man $j = n - 2$, ist $n = j + 2$ und

$$k = \frac{4 \cdot (j+2)}{j} = 4 + \frac{8}{j}.$$

Da k ganzzahlig sein muss, kann j nur die Werte 1, 2, 4, 8 annehmen.

Für $j = 1$ ist $n = 3$ und $k = 12$.

Für $j = 2$ ist $n = 4$ und $k = 8$.

Für $j = 4$ ist $n = 6$ und $k = 6$.

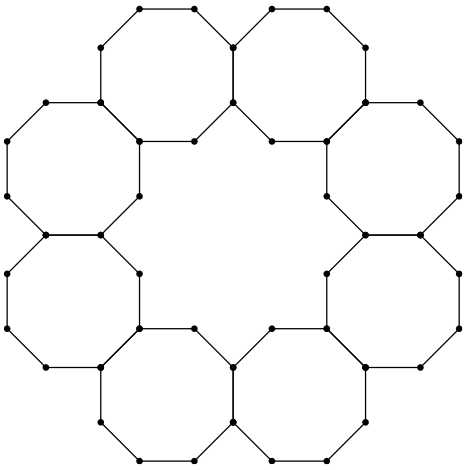
Für $j = 8$ ist $n = 10$ und $k = 5$.

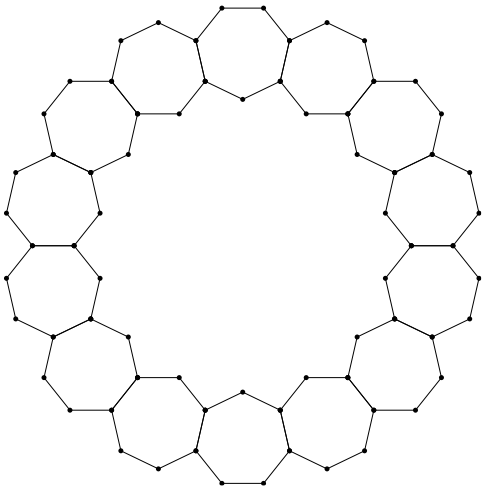
Die gefundenen Umrandungs-Möglichkeiten sind also die einzigen.

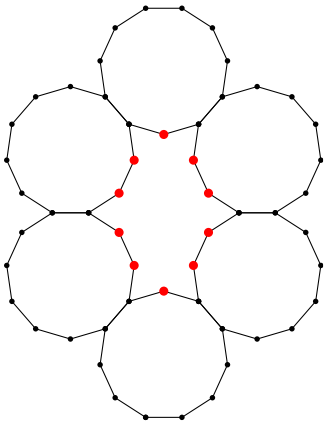
3. Einheitliche Umrandungen als solche

Regelmäßige 8-Ecke können ein unregelmäßiges n-Eck vollständig in einheitlicher Weise umranden. (Das umrandete n-Eck ist unregelmäßig, da nicht alle Randwinkel gleiche Größe haben.)

Auch regelmäßige 7-Ecke eignen sich als Kacheln für eine einheitliche Umrandung.

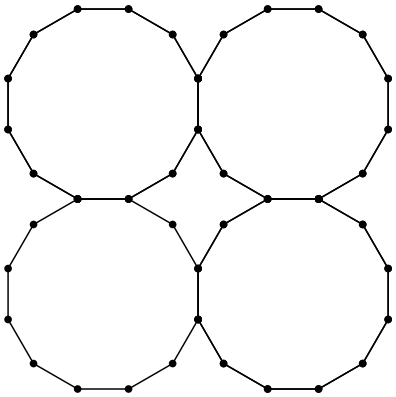


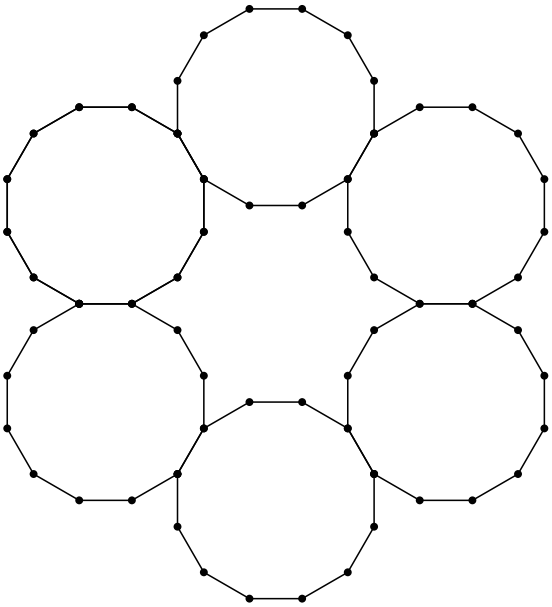




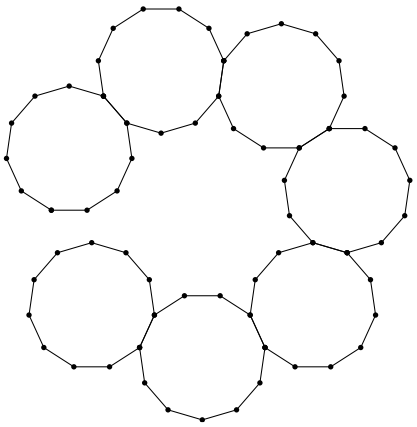
Links sieht man eine vollständige Umrandung, die jedoch ***nicht*** in einheitlicher Weise vorgenommen wurde. Die umrandete Figur ist zwar symmetrisch, aber der Übergang von einer Kachel zur nächst ist ***nicht*** einheitlich, wie man an der Abfolge der roten Punkte erkennen kann.

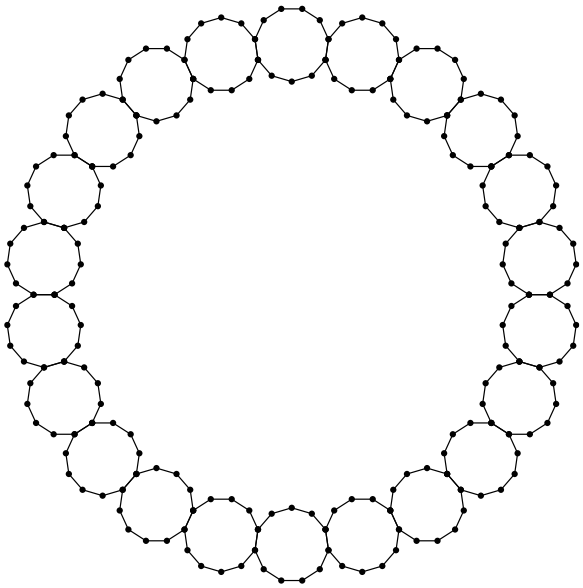
Regelmäßige 12-Ecke können unregelmäßige n-Ecke vollständig in einheitlicher Weise umranden:





Das scheint mit 11-Ecken nicht zu gelingen, jedenfalls nicht beim ersten Versuch:



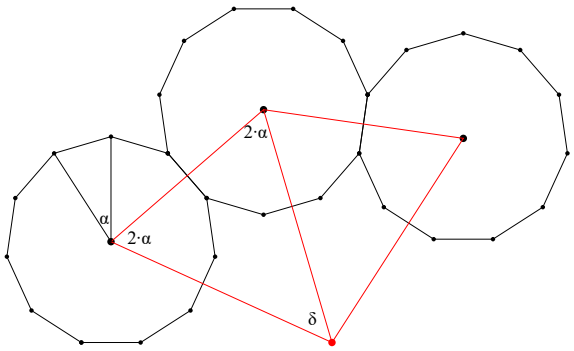


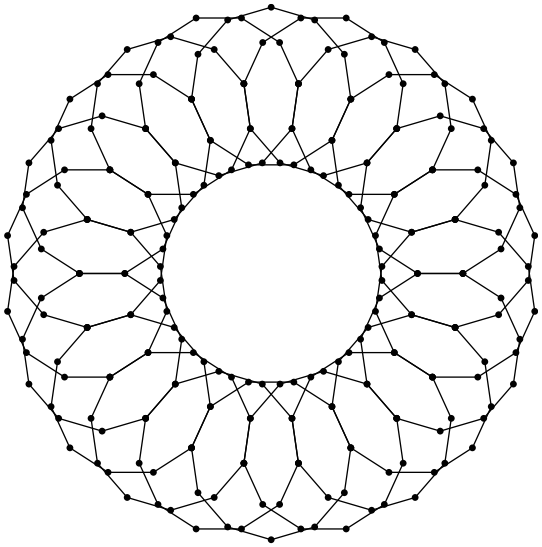
Sehen wir uns das näher an und greifen dafür jeweils 3 sich berührende 11-Ecke heraus. Der Mittelpunktswinkel des 11-Ecks ist $\alpha = \frac{360°}{11}$.

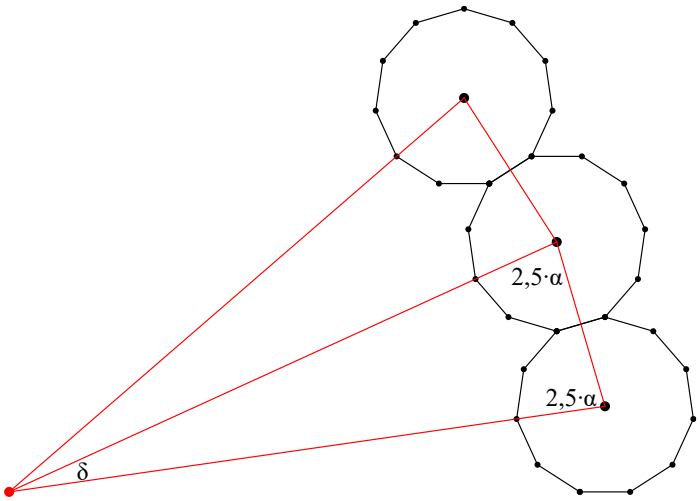
Oben links im nicht gelingenden Fall beträgt der Drehwinkel

$$\delta = 180° - 4 \cdot \alpha = 180° - \frac{4 \cdot 360°}{11} = 360° \cdot \frac{3}{22}.$$

Erst mit 22 Bausteinen hat man ein sich schließendes (und sich überlappendes) Muster.







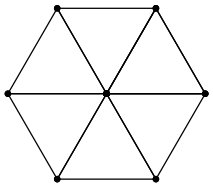
Oben rechts im gelingenden Fall ist der Drehwinkel $\delta = 180° - 5 \cdot \frac{360°}{11} = \frac{360°}{22}$.
Nach 22 Kacheln hat man wieder bei der ersten angekommen.

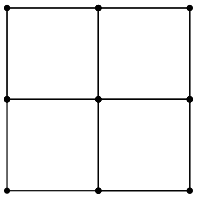
Dies lässt sich auf regelmäßige n-Ecke verallgemeinern. Der Winkel bei den Mittelpunkten der n-Ecke betrage $\frac{m}{2} \cdot \alpha$, also ist der Drehwinkel $\delta = 180° - m \cdot \alpha = 180° - m \cdot \frac{360°}{n} = 360° \cdot \frac{n - 2 \cdot m}{2 \cdot n}$.

Für $m = \frac{n-1}{2}$ ist $\delta = \frac{360°}{2 \cdot n}$, und der Kreis schließt sich. Das ist für ungerade n immer erreichbar.

Bei geradem $n = 2 \cdot k$ ist $\delta = 180° - m \cdot \alpha = 180° - m \cdot \frac{360°}{2 \cdot k} = 360° \cdot \frac{k - m}{2 \cdot k}$ und damit $m = k - 1$ wählbar.

Daher kann man immer ein ringförmiges Kachelmuster aus regelmäßigen n-Ecken erreichen.





Bei 3-Ecken und bei 4-Ecken schrumpft das umrandete Gebiet auf einen Punkt zusammen.