Jörg MEYER, Hameln

August 2021

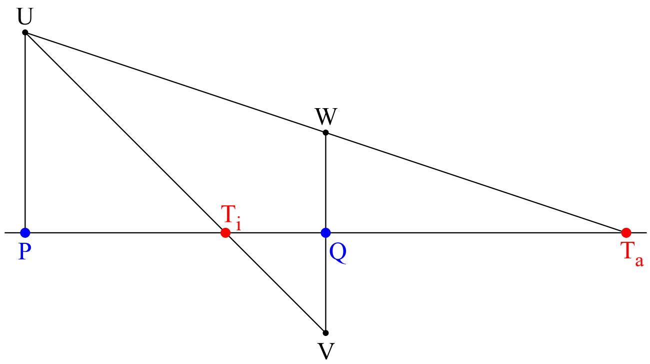
Kegelschnitt-Konstruktionen

Wie konstruiert man Um-, In und An-Kegelschnitte, wie die Scheitelkreise?

Notation

Sind P und Q Punkte so ist je nach Zusammenhang PQ die Gerade durch P und Q oder der Abstand zwischen P und Q. Ist g eine Gerade, so ist gP der Abstand zwischen P und g.

Innere und äußere Teilung



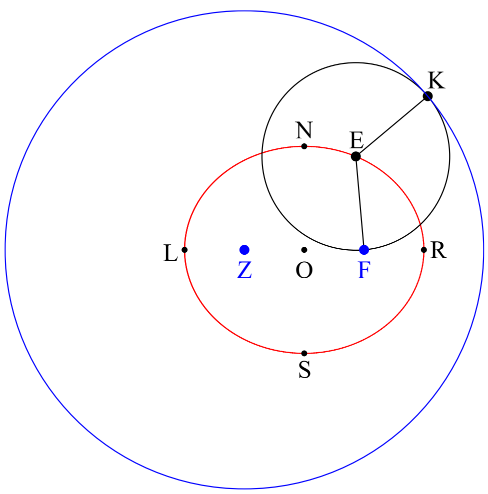
Die Strecke PQ wird durch T_i innen und durch T_a außen geteilt.

Mit $VQ = QW$ ist $\frac{PT_i}{QT_i} = \frac{UP}{QV} = \frac{UP}{WQ} = \frac{PT_a}{QT_a}$.

Ellipsenbezogene Konstruktionen

E1. Die Grundkonstruktion

... orientiert sich an der Kennzeichnung der Ellipse als Menge aller Punkte, die zu einem Funkt F und zu einem Kreis um Z mit dem Radius r den gleichen Abstand haben, dabei liege F **inner**halb des Kreises.



K durchlaufe den Kreis. Dann ist E der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zu FK mit ZK.

Es ist $EF = EK = r - EZ$, also $\boxed{EF + EZ = r}$.

Es sei O der Mittelpunkt von ZF mit $OF = f$.

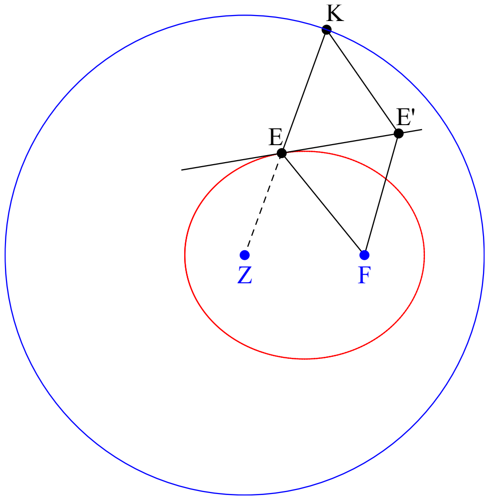
Für den Rechtspol R gilt

$r = RF + RZ = (OR - f) + (OR + f) = 2 \cdot OR$, also $\boxed{OR = \frac{r}{2} =: a}$.

Für den Nordpol N gilt $2 \cdot NZ = r$, also $NZ = a$ und wegen Pythagoras im Dreieck ZON dann $\boxed{NO = \sqrt{a^2 - f^2} =: b}$.

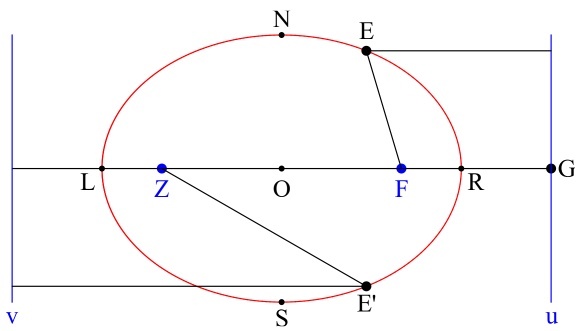
Sind F und Z sowie ein Ellipsenpunkt E gegeben, so bekommt man den zugehörigen Punkt K auf dem blauen Kreis auf der Verlängerung von ZE mit $EK = EF$.

E2. Ellipsen-Tangenten



Bei der Grundkonstruktion ist die Mittelsenkrechte zu K und F Tangente in E, denn für jeden von E verschiedenen Punkt E‘ auf dieser Mittelsenkrechten gilt zwar $E'F = E'K$, aber $E'K \neq r - E'Z$, so dass E‘ nicht zur selben Ellipse wie E gehört.

E3. Leitlinien



Die Strecke LR wird von F im Verhältnis $\frac{LF}{FR} = \frac{a+f}{a-f}$ geteilt. Der zugehörige äußere Teilungspunkt G habe von O den Abstand g; für ihn muss dann $\frac{a+f}{a-f} = \frac{LF}{FR} = \frac{LG}{GR} = \frac{a+g}{g-a}$

sein, was auf $\boxed{g = \frac{a^2}{f}}$ führt.

Dann ist $\frac{RF}{RG} = \frac{a-f}{g-a} = \boxed{\frac{f}{a} =: \varepsilon}$ und $\frac{LF}{LG} = \frac{a+f}{a+g} = \varepsilon$. Ebenso ist $\frac{NF}{uN} = \frac{a}{g} = \varepsilon$. Dabei verlaufe die Gerade u durch G senkrecht zur Achse LR.

Koordinatisiert man (y-Achse durch S und N, x-Achse durch L und R), so hat man für jeden Ellipsenpunkt $E = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ die Beziehung $EZ^2 - EF^2 = (x+f)^2 - (x-f)^2 = 4 \cdot x \cdot f$, also $EZ - EF = \frac{4 \cdot x \cdot f}{2 \cdot a}$ und

damit $EF = a - \frac{x \cdot f}{a} = \frac{f}{a} \cdot \left(\frac{a^2}{f} - x \right) = \frac{f}{a} \cdot (g - x) = \varepsilon \cdot uE$. Alle Ellipsenpunkte E erfüllen die Beziehung

$\boxed{\frac{EF}{uE} = \varepsilon}$. Dieser Quotient heißt **numerische Exzentrizität** und ist für Ellipsen immer kleiner als 1. Für

die Gerade v mit $x = -g$ gilt analog $\boxed{\frac{EZ}{vE} = \varepsilon}$. Die Geraden u und v sind die beiden **Leitlinien** der Ellipse.

Umgekehrt ist dann $EF + EZ = \varepsilon \cdot (uE + vE) = \frac{f}{a} \cdot 2 \cdot g = \frac{f}{a} \cdot 2 \cdot \frac{a^2}{f} = 2 \cdot a = r$.

Die Leitlinieneigenschaft ist also zur Brennpunktseigenschaft äquivalent.

E4. Die Ellipsengleichung

Die Koordinatisierung sei wie im letzten Abschnitt. Ist $E=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ein allgemeiner Ellipsenpunkt, so gilt

wegen $(x-f)^2+y^2=\frac{f^2}{a^2}\cdot\left(x-\frac{a^2}{f}\right)^2$ oder $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$.

E5. Konstruktion des zweiten Brennpunkts

Sind F und die zugehörige Leitlinie u sowie ein Ellipsenpunkt E gegeben, so findet man Z wie folgt:

Man bestimmt $\varepsilon=\frac{EF}{uE}$ und konstruiert die zu u senkrechte Gerade FG durch F. Wegen $\frac{RF}{RG}=\varepsilon$ ist $R=\frac{F+\varepsilon\cdot G}{1+\varepsilon}$. Wegen $\frac{LF}{LG}=\varepsilon$ ist $L=\frac{F-\varepsilon\cdot G}{1-\varepsilon}$. Damit hat man auch $O=\frac{L+R}{2}=\frac{F-\varepsilon^2\cdot G}{1-\varepsilon^2}$ und schließlich $Z=2\cdot O-F=\frac{\left(1+\varepsilon^2\right)\cdot F-2\cdot\varepsilon^2\cdot G}{1-\varepsilon^2}$. Für jeden Ellipsenpunkt P gilt dann $PF+PZ=LR$.

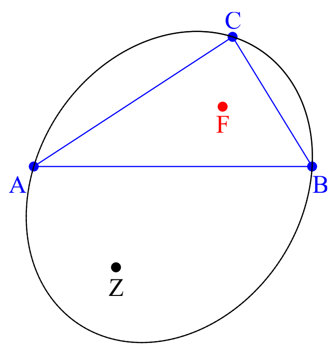
Wegen $O=\frac{F-\varepsilon^2\cdot G}{1-\varepsilon^2}$ ist $OF=\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\cdot(G-F)$.

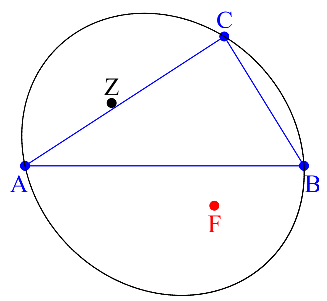
E6. Konstruktion des zweiten Brennpunkts einer Um-Ellipse

Durch drei Punkte A, B, C verläuft eine eindeutige Ellipse, wenn zusätzlich ein Brennpunkt F gegeben ist. Um den zweiten Brennpunkt Z zu konstruieren, konstruiert man zunächst die zu F gehörige Leitlinie u. Es muss $FA=\varepsilon\cdot uA;\ FB=\varepsilon\cdot uB;\ FC=\varepsilon\cdot uC$ gelten. Hier liegt die Verwendung von auf A, B, C bezogenen baryzentrischen Koordinaten nahe, wo Punkte die Gestalt $P=(u:v:w)=\frac{u\cdot A+v\cdot B+w\cdot C}{u+v+w}$ und Geraden die Gestalt $g=[gA:gB:gC]$ haben.

Der Punkt $(u:v:w)$ liegt auf der Geraden $[U:V:W]$ genau dann, wenn $u\cdot U+v\cdot V+w\cdot W=0$ ist.

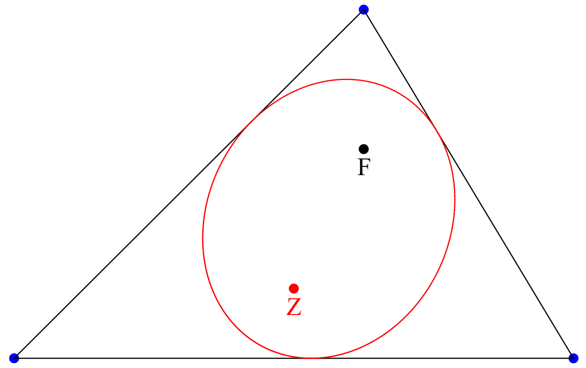
Es ist also $u=[FA:FB:FC]$. Diese Gerade schneidet $AB=[0:0:1]$ in $(-FB:FA:0)$ und $BC=[1:0:0]$ in $(0:-FC:FB)$. Die weitere Konstruktion verläuft wie oben.





F braucht nicht im Dreiecksinneren gewählt zu werden.

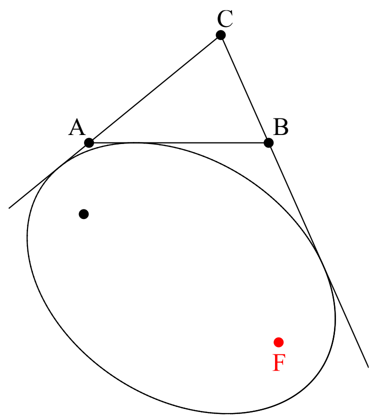
E7. Konstruktion einer Ellipse aus einem Brennpunkt und drei Tangenten



Hat man eine Ellipsentangente und F, so bekommt man den zugehörigen Kreispunkt K durch Spiegelung von F an der Tangente.

Hat man drei Ellipsentangenten und F, so hat man drei Kreispunkte und damit auch Z. Dann hat man aber auch drei Ellipsenpunkte.

Wählt man F außerhalb des Dreiecks, bekommt man eine An-Ellipse.



E8. Die Scheitel-Krümmungskreise

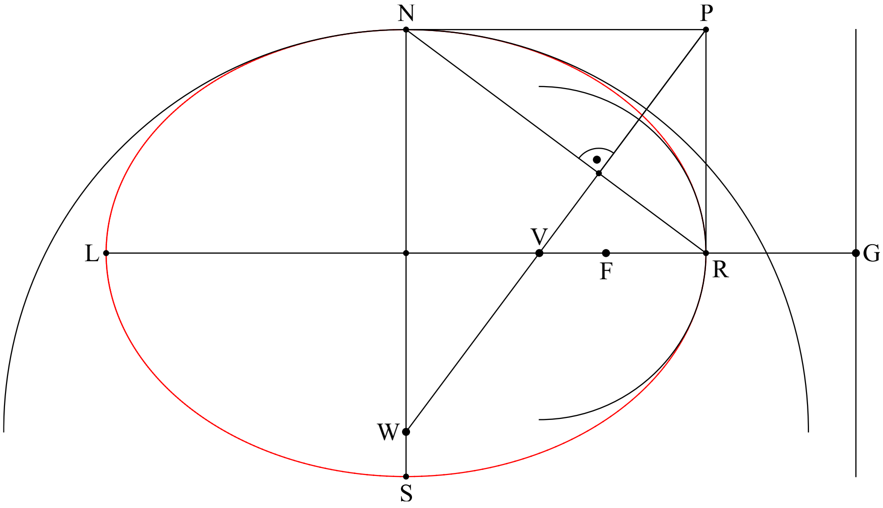
Der Radius des **Krümmungskreises** zur Kurve mit dem allgemeinen Punkt $P(t)=\begin{pmatrix} a\cdot\cos t \\ b\cdot\sin t \end{pmatrix}$ ist

$$\rho(t)=\frac{P'^2}{P'^{\perp}\cdot P''}\cdot|P'|=\frac{a^2\cdot\sin^2 t+b^2\cdot\cos^2 t}{a\cdot b}\cdot\sqrt{a^2\cdot\sin^2 t+b^2\cdot\cos^2 t}\text{, also } \rho(0°)=\frac{b^2}{a} \text{ und } \rho(90°)=\frac{a^2}{b}.$$

Mit $R=\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ ist der Mittelpunkt V des Krümmungskreises zu R daher $V=\begin{pmatrix} a-\frac{b^2}{a} \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f^2/a \\ 0 \end{pmatrix}$, und mit

$N=\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ ist der Mittelpunkt W des Krümmungskreises zu N gegeben durch $W=\begin{pmatrix} 0 \\ b-\frac{a^2}{b} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -f^2/b \end{pmatrix}$.

Die Gerade durch V und W hat die Gleichung $y = \frac{a}{b} \cdot x - \frac{f^2}{b}$, auf ihr liegt der Punkt $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, und sie steht auf NR senkrecht. Das führt zu nebenstehender Konstruktion:

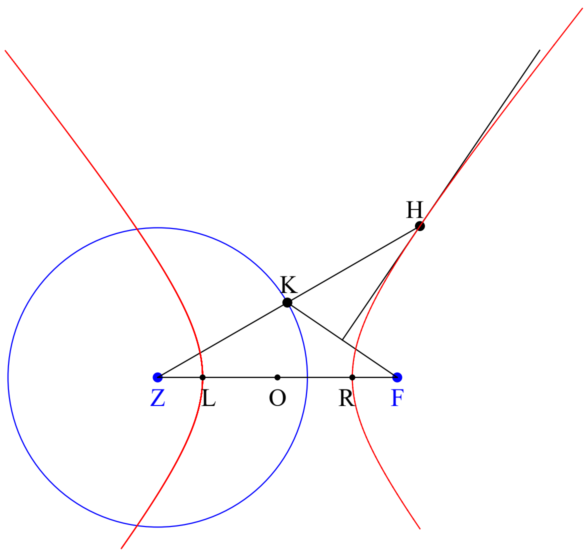


Man hat mit $\varepsilon = \frac{f}{a}$ die Kette $\boxed{G = \begin{pmatrix} a^2/f \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot\varepsilon} R = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot\varepsilon} F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot\varepsilon} V = \begin{pmatrix} f^2/a \\ 0 \end{pmatrix}}$.

Hyperbelbezogene Konstruktionen

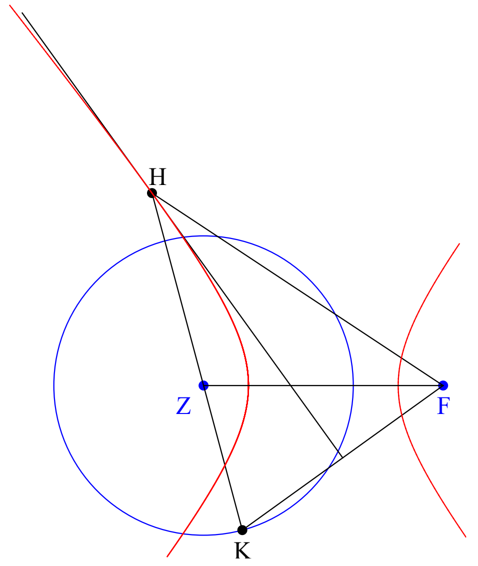
H1. Die Grundkonstruktion

... orientiert sich an der Kennzeichnung der Hyperbel als Menge aller Punkte, die zu einem Funkt F und zu einem Kreis um Z mit dem Radius r den gleichen Abstand haben, dabei liege F **außer**halb des Kreises.



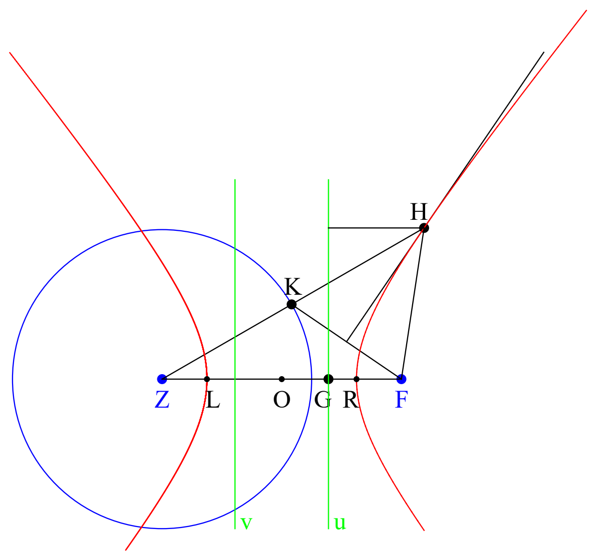
K durchlaufe den Kreis. Dann ist H der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zu FK mit ZK.
Es ist $HF = KK = HZ - r$, also $\boxed{HZ - HF = r}$ für Hyperbelpunkte H auf dem zu F gehörigen Ast.
Wie bei der Ellipse ist die Mittelsenkrechte zu FK Tangente zu H.
Es sei O der Mittelpunkt von ZF mit $OF = f$.
Für den Rechtspol R gilt
$r = RZ - RF = (OR + f) - (f - OR) = 2 \cdot OR$, also
$\boxed{OR = \frac{r}{2} =: a}$.

Sind F und Z sowie ein Hyperbelpunkt H gegeben, so bekommt man den zugehörigen Punkt K auf dem blauen Kreis auf ZH mit $HK = HF$.



Für Hyperbelpunkte H auf dem zu Z gehörigen Ast hat man die gleiche Situation:
Der Abstand zwischen H und F ist genauso groß wie der Abstand zwischen H und dem Kreis, wobei unter dem Abstand zwischen Punkt und Kreis jetzt der größtmögliche Abstand verstanden wird.
Die Mittelsenkrechte von FK ist Tangente zu H (mit derselben Begründung wie im Ellipsenfall).

H2. Leitlinien



Die Strecke LR wird von F im Verhältnis $\frac{LF}{FR}=\frac{a+f}{f-a}$ geteilt. Der zugehörige innere Teilungspunkt G habe von O den Abstand g; für ihn muss dann $\frac{a+f}{f-a}=\frac{LF}{FR}=\frac{LG}{GR}=\frac{a+g}{a-g}$ sein, was auf $\boxed{g=\frac{a^2}{f}}$ führt.

Die numerische Exzentrizität $\varepsilon=\frac{f}{a}$ ist jetzt größer als 1.

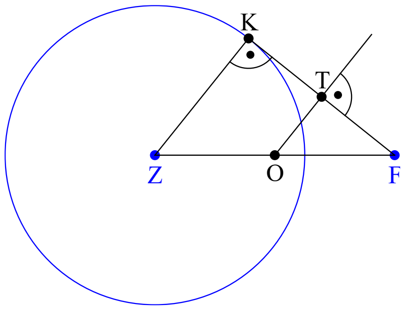
Koordinatisiert man (y-Achse durch O senkrecht zu ZF, x-Achse durch Z und F), so hat man für jeden Hyperbelpunkt $H=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ die Beziehung $HZ^2-HF^2=(x+f)^2-(x-f)^2=4\cdot x\cdot f$, also $HZ+HF=\frac{4\cdot x\cdot f}{2\cdot a}$ und damit $HF=\frac{x\cdot f}{a}-a=\frac{f}{a}\cdot\left(x-\frac{a^2}{f}\right)=\frac{f}{a}\cdot(x-g)=\varepsilon\cdot uH$. Alle Hyperbelpunkte H erfüllen die Beziehung $\boxed{\frac{HF}{uH}=\varepsilon}$. Die Geraden $u: x=g$ und $v: x=-g$ sind die beiden **Leitlinien** der Hyperbel.

H3. Gleichung der Hyperbel

Die Koordinatisierung sei wie im letzten Abschnitt. Die *Gleichung* der Hyperbel ergibt sich wegen $HF=\varepsilon\cdot uH$ mit $H=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\varepsilon=\frac{f}{a}$, $u: x=\frac{a^2}{f}$ und $F=\begin{pmatrix}f\\0\end{pmatrix}$ zu $(x-f)^2+y^2=\frac{f^2}{a^2}\cdot\left(x-\frac{a^2}{f}\right)^2$ bzw. mit der Abkürzung $\boxed{b:=\sqrt{f^2-a^2}}$ zu $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$. Eine Parameterdarstellung ist $\begin{pmatrix}\pm a\cdot\cosh(t)\\ b\cdot\sinh(t)\end{pmatrix}$.

H4. Asymptoten und die Bedeutung von b

Die Koordinatisierung sei wie im vorletzten Abschnitt, also $Z=\begin{pmatrix}-f\\0\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}f\\0\end{pmatrix}$ und $ZK=r$.



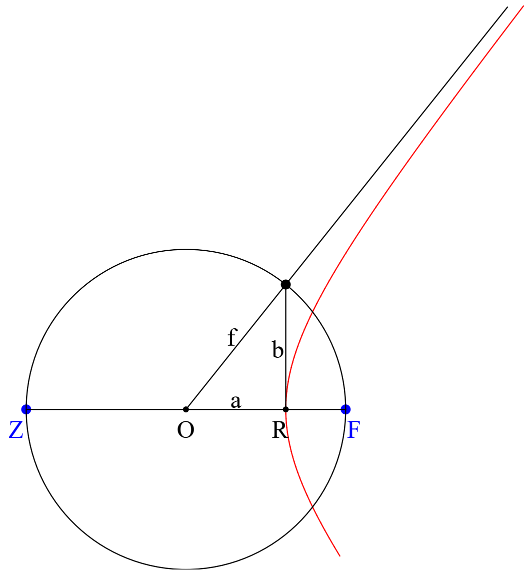
Steht FK auf ZK senkrecht, so ist die Mittelsenkrechte von FK zu ZK parallel, und es gibt keinen Hyperbelpunkt. Die Mittelsenkrechte zu FK ist dann *Asymptote* der Hyperbel.

Der blaue Kreis mit $(x-f)^2+y^2=r^2=4\cdot a^2$ und der Thaleskreis über ZF mit $x^2+y^2=f^2$ haben die Chordale $x=\dfrac{2\cdot a^2-f^2}{f}=\dfrac{a^2-b^2}{f}$.

Daher hat der Kreispunkt K die Gestalt $K=\frac{1}{f}\cdot\begin{pmatrix}a^2-b^2\\\pm 2\cdot a\cdot b\end{pmatrix}$. Der Mittelpunkt von KF ist $T=\frac{a}{f}\cdot\begin{pmatrix}a\\\pm b\end{pmatrix}$.

Die Mittelsenkrechte zu KF geht wegen des Strahlensatzes auch durch $O=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, hat also die Gleichung $\boxed{y_{As}=\pm\frac{b}{a}\cdot x}$.

Wegen $f^2=a^2+b^2$ hat man eine anschauliche Bedeutung von b sowie eine einfache Asymptoten-Konstruktion.



H5. Konstruktion des zweiten Brennpunkts

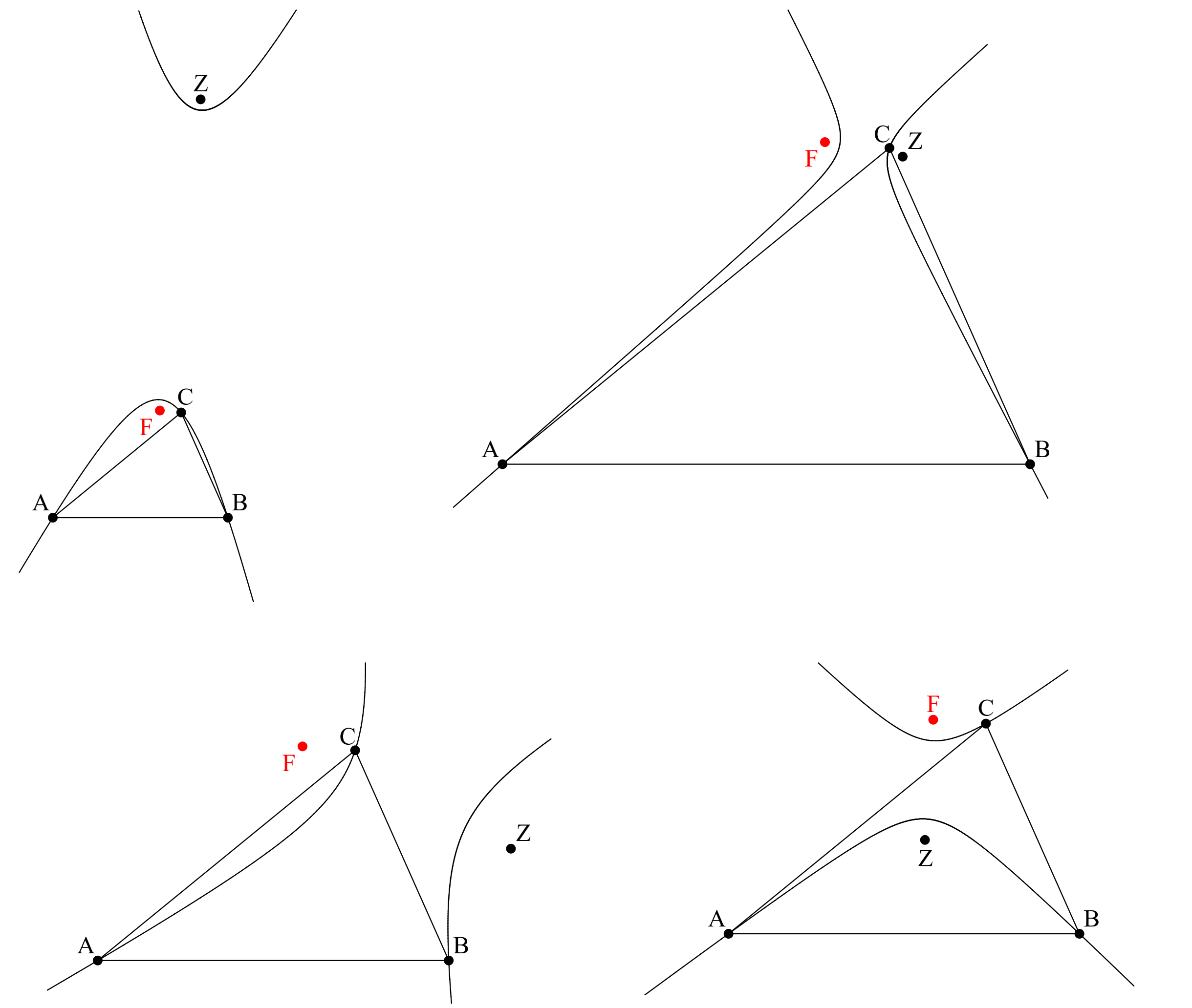
Sind F und die zugehörige Leitlinie u sowie ein Hyperbelpunkt H gegeben, so findet man Z wie folgt:

Man bestimmt $\varepsilon=\frac{HF}{uH}$ und konstruiert die zu u senkrechte Gerade FG durch F. Wegen $\frac{RF}{RG}=\varepsilon$ ist $R=\frac{F+\varepsilon\cdot G}{1+\varepsilon}$. Wegen $\frac{LF}{LG}=\varepsilon$ ist $L=\frac{F-\varepsilon\cdot G}{1-\varepsilon}$. Damit hat man auch $O=\frac{L+R}{2}=\frac{F-\varepsilon^2\cdot G}{1-\varepsilon^2}$ und schließlich

$$Z=2\cdot O-F=\frac{\left(1+\varepsilon^2\right)\cdot F-2\cdot\varepsilon^2\cdot G}{1-\varepsilon^2}.$$

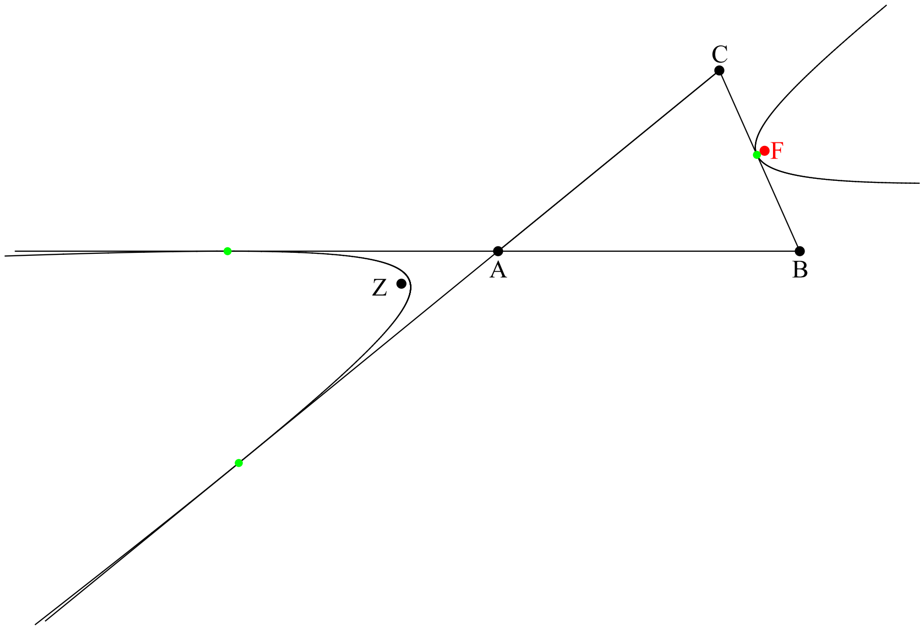
H6. Konstruktion des zweiten Brennpunkts einer Um-Hyperbel

Durch drei Punkte A, B, C verlaufen *vier* eindeutige Hyperbeln, wenn zusätzlich ein Brennpunkt F gegeben ist, da A, B, C auf einem einzigen Ast liegen können oder A auf einem und B und C auf dem anderen usw. Im ersten Fall (A, B, C auf einem Ast) kann F nicht beliebig gewählt werden.



Um den zweiten Brennpunkt Z zu konstruieren, konstruiert man zunächst die zu F gehörige Leitlinie u. Es muss $FA = \varepsilon \cdot uA$; $FB = \varepsilon \cdot uB$; $FC = \varepsilon \cdot uC$ gelten. Wie bei Ellipsen liegt hier die Verwendung von auf A, B, C bezogenen baryzentrischen Koordinaten nahe. Hier bieten sich die Leitlinien $u = [FA : FB : FC]$, $u_A = [-FA : FB : FC]$, $u_B = [FA : -FB : FC]$ oder $u_C = [FA : FB : -FC]$ an. Die weitere Konstruktion verläuft wie oben.

H7. Konstruktion einer Hyperbel aus einem Brennpunkt und drei Tangenten



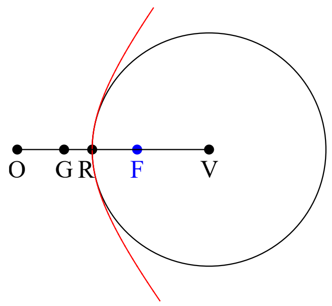
Hat man eine Hyperbeltangente und F, so bekommt man den zugehörigen Kreispunkt K durch Spiegelung von F an der Tangente.

Hat man drei Hyperbeltangenten und F, so hat man drei Kreispunkte und damit auch Z. Man kann F nicht beliebig wählen.

H8. Der Scheitel-Krümmungskreis

Der Radius des **Krümmungskreises** zur Kurve mit dem allgemeinen Punkt $P(t)=\begin{pmatrix} a\cdot\cosh t \\ b\cdot\sinh t \end{pmatrix}$ ist

$$\rho(t)=\frac{P'^2}{P'^{\perp}\cdot P''}\cdot|P'|, \text{ also } \rho(0°)=\frac{b^2}{a}.$$



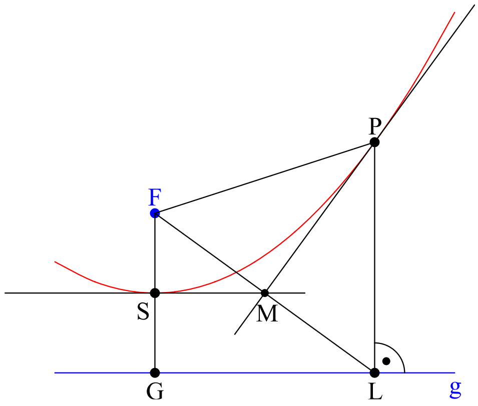
Mit $R=\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ ist daher $V=\begin{pmatrix} a+\frac{b^2}{a} \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f^2/a \\ 0 \end{pmatrix}$ der Mittelpunkt des Krümmungskreises zu R.

Man hat mit $\varepsilon=\frac{f}{a}$ die Kette $\boxed{G=\begin{pmatrix} a^2/f \\ 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{\cdot\varepsilon}R=\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{\cdot\varepsilon}F=\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{\cdot\varepsilon}V=\begin{pmatrix} f^2/a \\ 0 \end{pmatrix}}$.

Parabelbezogene Konstruktionen

P1. Die Grundkonstruktion

... orientiert sich an der Kennzeichnung der Parabel als Menge aller Punkte, die zu einem Funkt F und der Leitlinie g den gleichen Abstand haben.



K durchlaufe die Leitlinie g. Dann ist P als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zu FL mit der Senkrechten zu g durch L ein Parabelpunkt.
Für den Scheitelpunkt S gilt $gS = GS = SF =: f$.

Die Mittelsenkrechte zu LF ist Tangente zu P, denn für jeden anderen Punkt Q auf ihr wäre $FQ = LQ \neq gQ$.
FL steht auf der Tangente senkrecht, der Mittelpunkt M von FL auf der Tangente hat als y-Koordinate
$\frac{y_F + y_G}{2} = y_S$; M liegt also auf der Tangente zu S.

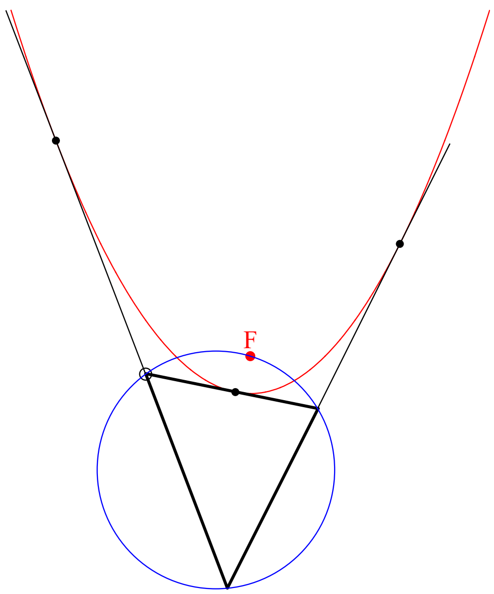
Da MP Mittelsenkrechte zu F und L ist, gilt, dass ein achsenparalleler Strahl, der die Parabel innen in P trifft, in Richtung F reflektiert wird.

P2. Die Gleichung der Parabel

Koordinatisiert man so, dass die x-Achse parallel zur Leitlinie und die y-Achse furch F verläuft mit $F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$ und $g: y = -f$, so hat man für den Parabelpunkt $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ die Gleichung

$x^2 + (y-f)^2 = (y+f)^2$ bzw. $\boxed{y = \frac{x^2}{4 \cdot f}}$.

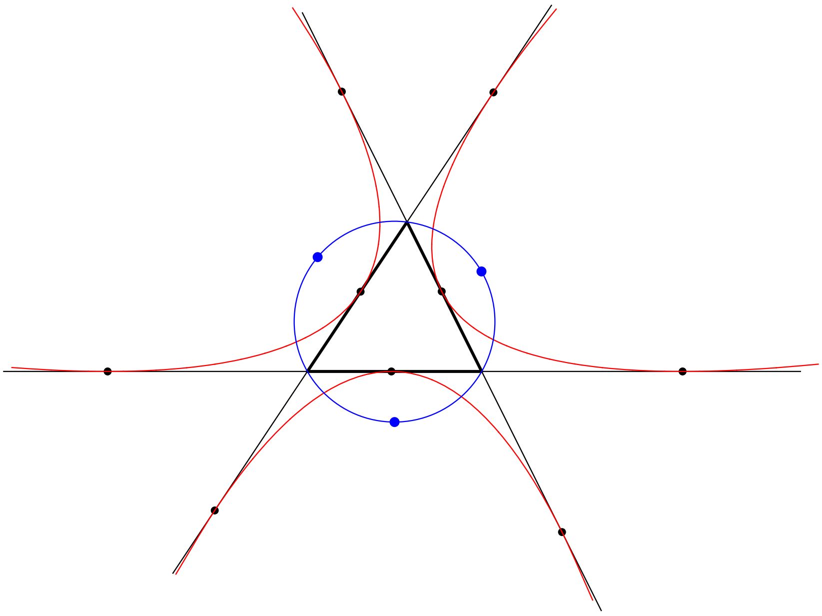
P3. Eine Beobachtung am Tangentendreieck



Drei Parabeltangenten bilden ein (fett gezeichnetes) Tangentendreieck.
Die senkrechte Projektion von F auf jede der drei Tangenten liegt auf der Scheiteltangente; die drei Projektionen von F auf die Seiten von ABC sind also kollinear. Nach dem Satz von WALLACE/SIMSON muss dann F auf dem Umkreis von ABC liegen.

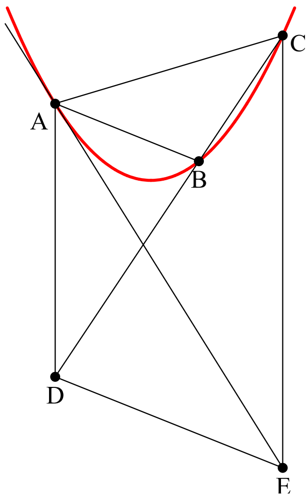
P4. Konstruktion einer Parabel aus dem Brennpunkt F und drei Tangenten

Die drei Tangenten bilden ein Dreieck, auf dessen Umkreis F liegen muss. Die Spiegelungen von F an zwei Tangenten liefern zwei Punkte der Leitlinie.
Die Graphik zeigt drei der möglichen An-Parabeln.



P5. Konstruktion einer Um-Parabel aus drei Punkten und der Achsenrichtung

Wenn die Achsenrichtung und drei Punkte gegeben sind, hat man auch drei Tangenten wegen der folgenden Anwendung des Satzes von PASCAL:



Auf der Normalparabel mit $y = x^2$ liegen die Punkte

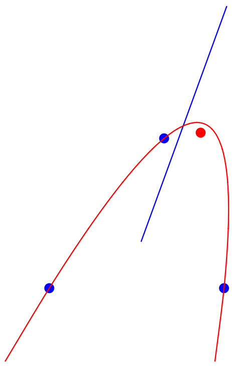
$A = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b \\ b^2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c \\ c^2 \end{pmatrix}$. BC hat die Gleichung $y = (b+c)\cdot x - b\cdot c$

und schneidet die Senkrechte durch A in $D = \begin{pmatrix} a \\ (b+c)\cdot a - b\cdot c \end{pmatrix}$. Die

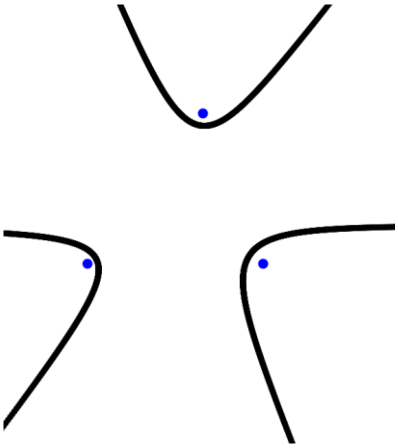
Parallele DE zu AB hat die Gleichung $y = (a+b)\cdot x + c\cdot a - b\cdot c - a\cdot a$ und

schneidet die Senkrecht durch C in $E = \begin{pmatrix} c \\ a\cdot(2\cdot c - a) \end{pmatrix}$. Dann hat AE die

Steigung $2\cdot a$, ist also Tangente in A.
(Bataille, Forum Geom. 2011, S. 57-63)

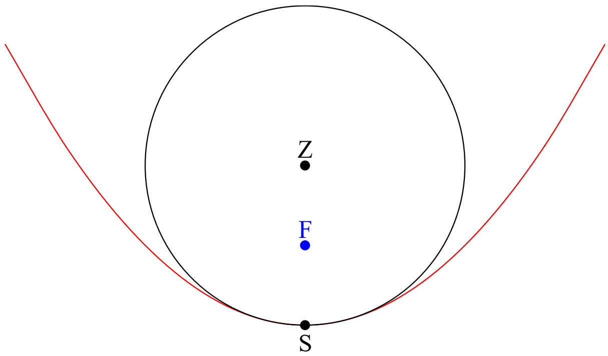


Da ein achsenpaaralleler Strahl in einem Parabelpunkt an der dortigen Tangente so reflektiert wird, dass er anschließend durch den Brennpunkt geht, hat man diesen, wenn zwei Tangenten mit ihren Berührpunkten bekannt sind. Spiegelt man F an den Tangenten, bekommt man Punkte auf der Leitlinie.
Die blaue Strecke gibt die Achs-Richtung an, nicht die Achse selber. Die blauen Punkte zeigen das Ausgangsdreieck an.



Die Graphik zeigt die Brennpunkte für verschiedene Achsrichtungen. Man kann also den Brennpunkt einer Um-Parabel nicht beliebig wählen, sondern er muss auf der nebenstehenden Kurve liegen.

P6. Der Scheitelkrümmungskreis der Parabel



Der allgemeine Punkt ist $P(t)=\begin{pmatrix} t \\ a\cdot t^2 \end{pmatrix}$ mit

$a=\frac{1}{4\cdot f}$. Es ist $\rho(t)=\frac{P'^2}{P'^{\perp}\cdot P''}\cdot|P'|$, also

$\rho(0)=\frac{1}{2\cdot a}=2\cdot f$.

Man bekommt das Zentrum Z durch Spiegelung des Scheitelpunkts S an F.