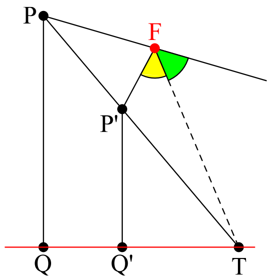
Jörg MEYER, Hameln

27. 7. 2023

Konstruktion von Kegelschnitt-Tangenten

Konstruiert man einen Kegelschnitt mit Hilfe von Brennpunkt und Leitkreis, werden die Tangenten automatisch mitgeliefert (als Mittelsenkrechten eines Leitkreispunktes und des Brennpunkts).

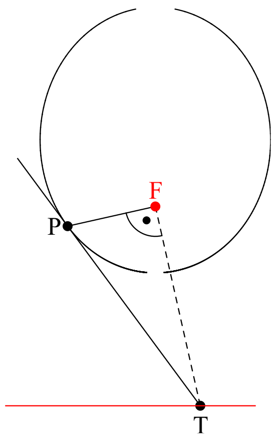
Anders ist es, wenn man den Kegelschnitt mit Hilfe von Brennpunkt, Leitgerade und Exzentrizität konstruiert. Hier bietet sich die folgende Konstruktion[1] an:

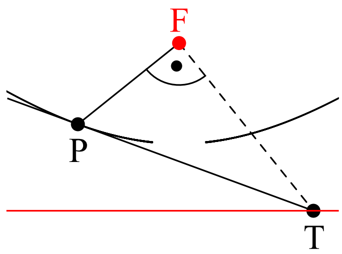


Es seien P und P‘ zwei Kurvenpunkte, deren Verbindungsgerade die Leitgerade in T schneidet.
Dann halbiert TF den Außenwinkel des Dreiecks PP’F.
Zu zeigen ist $\frac{PT}{P'T}=\frac{PF}{P'F}$. Wegen $\frac{PF}{P'F}=\frac{\varepsilon\cdot PQ}{\varepsilon\cdot P'Q'}=\frac{PQ}{P'Q'}=\frac{PT}{P'T}$ ist das nur der Strahlensatz.

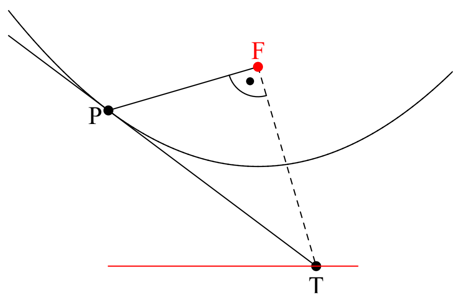
Dies lässt sich benutzen, um Tangenten zu konstruieren:

Wandert P‘ auf P zu, so wird aus PP‘ die Tangente in P, und der grüne und der gelbe Winkel ergeben zusammen 180°.
Die Tangente in P lässt sich dadurch konstruieren, dass in F die Senkrechte zu PF errichtet wird; diese schneidet die Leitgerade in T, und dann ist TP die Tangente.





Bei der Parabel hat man folgende Situation:



Mit $F=\begin{pmatrix}0\\f\end{pmatrix}$ und $y=-f$ als Leitgerade hat die Parabel die Gleichung $y=\frac{x^2}{4\cdot f}$. An der Stelle $x=t$ hat FT die Gleichung $y=\frac{t\cdot x}{f-\frac{t^2}{4\cdot f}}+f=\frac{4\cdot f\cdot t\cdot x}{4\cdot f^2-t^2}+f$, was auf

$T=\begin{pmatrix}t^2-4\cdot f^2\\-f\end{pmatrix}$ führt; Die Steigung von PT hat also den erwarteten Wert $\frac{t}{2\cdot f}$.

[1] Idee: W.H.Besant (^{4}1895): Conic sections treated geometrically. London: George Bell.