Jörg MEYER, Hameln

Letzte Änderung am 14. 9. 2023

Konstruktion eines Kegelschnitts aus Brennpunkt, Leitgerade und Exzentrizität und weitere Konstruktionen

Inhalt

1. Einleitung

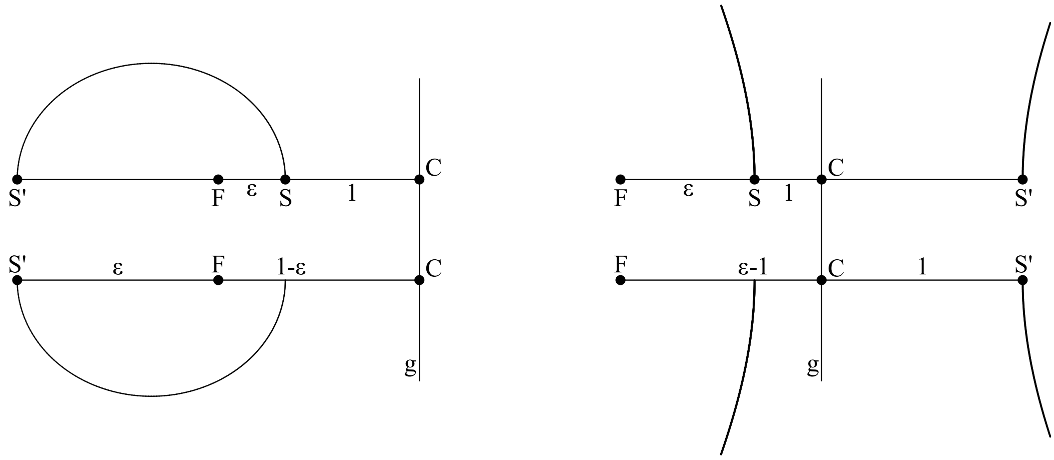
Es ist bekannt, wie man eine Parabel konstruiert, wenn Brennpunkt und Leitgerade gegeben sind.

Aber wie geht man vor, wenn man eine Ellipse oder eine Hyperbel aus Brennpunkt, Leitgerade und Exzentrizität $\varepsilon \neq 1$ punktweise konstruieren will? Man kann die APOLLONIUS-Kreise benutzen[1], und wenn man das nicht will, kann man mit der Konstruktion der beiden Hauptscheitelpunkte beginnen.

Im Folgenden sei PQ der Abstand zwischen den beiden Punkten P und Q sowie gP der Abstand zwischen dem Punkt P und der Geraden g.

Ist F der Brennpunkt und C auf der Leitgeraden der Lotfußpunkt von F, so gibt es auf der Geraden durch F und C zwei einfach zu konstruierende Punkte S und S‘ mit der Eigenschaft, dass $\frac{SF}{SC} = \frac{S'F}{S'C} = \varepsilon$ gilt. Dabei teile S die Strecke FC innen und S‘ außen. Es gilt also $\boxed{S = \frac{F + \varepsilon \cdot C}{1 + \varepsilon}}$.

[1] J. Meyer, Verallgemeinerung von Mittelsenkrechte und Parabel, in: Der Mathematikunterricht 2023, Heft 3.



Links sieht man die Verhältnisse für $0<\varepsilon<1$ (Ellipse). Wegen $F=(1-\varepsilon)\cdot S'+\varepsilon\cdot C$ ist $S'=\frac{F-\varepsilon\cdot C}{1-\varepsilon}$.

Rechts ist $1<\varepsilon$ (Hyperbel). Wegen $C=\frac{1\cdot F+(\varepsilon-1)\cdot S'}{\varepsilon}$ ist auch hier $\boxed{S'=\frac{F-\varepsilon\cdot C}{1-\varepsilon}}$.

2. Symmetrie und Interpretation von S und S‘

Nach ihrer Definition als Ortskurve sind Ellipse und Hyperbel zur Geraden durch F und C symmetrisch.

Koordinatisiert man so, dass $F=\begin{pmatrix}-c\\0\end{pmatrix}$ und $C=\begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix}$ ist, gilt $S=\frac{\begin{pmatrix}-c\\0\end{pmatrix}+\varepsilon\cdot\begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix}}{1+\varepsilon}=\begin{pmatrix}c\cdot\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\\0\end{pmatrix}=:\begin{pmatrix}c\cdot\sigma\\0\end{pmatrix}$ und

$S'=\frac{\begin{pmatrix}-c\\0\end{pmatrix}-\varepsilon\cdot\begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix}}{1-\varepsilon}=\begin{pmatrix}c\cdot\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{c}{\sigma}\\0\end{pmatrix}$ sowie $\sigma+\frac{1}{\sigma}=2\cdot\frac{\varepsilon^2+1}{\varepsilon^2-1}$ und daher $\frac{S+S'}{2}=c\cdot\frac{\varepsilon^2+1}{\varepsilon^2-1}$.

Für jeden Kurvenpunkt $P=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ gilt $FP=\varepsilon\cdot gP$, was wegen $F=\begin{pmatrix}-c\\0\end{pmatrix}$ und $g: x=c$ auf

$$\left(u-c\cdot\left(\frac{\varepsilon^2+1}{\varepsilon^2-1}\right)\right)^2+v^2=c^2\cdot4\cdot\frac{\varepsilon^2}{\left(1-\varepsilon^2\right)^2}$$

führt. Man erkennt die Symmetrie zum Mittelpunkt von S und S‘.

Eine kleine Rechnung zeigt, dass die Kurve bei S und S‘ die Rechtsachse schneidet.

3. Rückführung auf Standardkonstruktionen

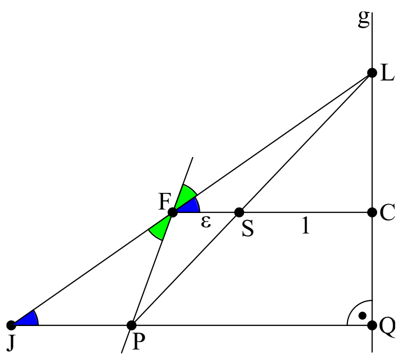
Da man nun die Symmetrie von Ellipse und Hyperbel kennt, weiß man, dass man mit S und S‘ die beiden Hauptscheitelpunkte gefunden hat und damit auch den Mittelpunkt und den zweiten Brennpunkt, so dass man mit einer der üblichen Konstruktionsmethoden weitermachen kann.

4. Eine alternative Konstruktion

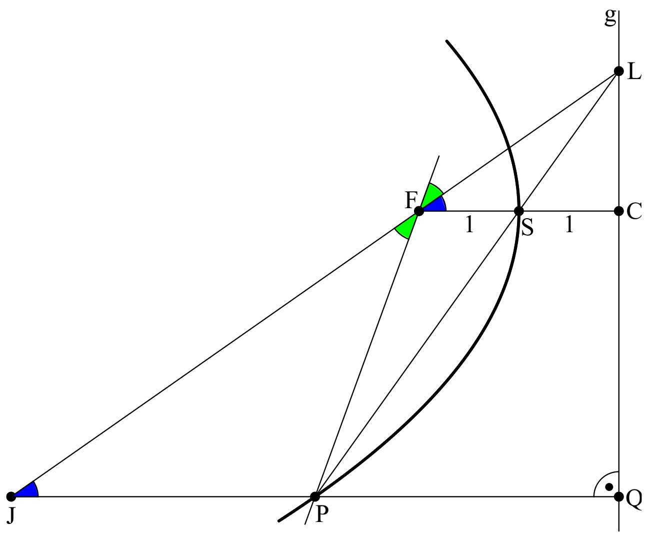
Diese wird den Vorteil haben, für Parabeln, Ellipsen und Hyperbeln einheitlich durchführbar zu sein, allerdings bei den Scheitelpunkten problematisch werden.

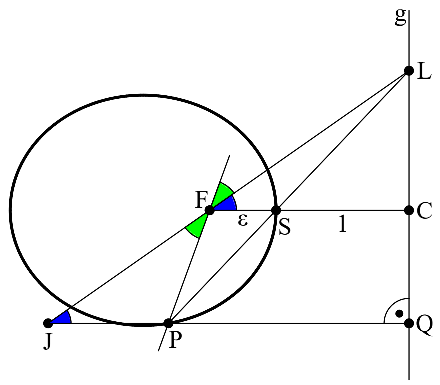
Kurvenpunkte P haben die Eigenschaft, dass $FP = \varepsilon \cdot gP$ gilt. Ist Q der Lotpunkt von P auf g, muss $FP = QP$ sein. Leider ist die Gerade durch F und P nicht parallel zur Geraden durch F und Q, so dass man keinen Strahlensatz anwenden kann. Dies lässt sich jedoch ändern, wenn man auf der Geraden durch P und Q den Punkt J einführt mit $PJ = PF$. Man kann wie folgt vorgehen[2]:

L durchlaufe die Leitgerade g.
LF hat mit FC den blauen Winkel. Spiegelt man den an FL, bekommt man den grünen Winkel.
P sei der Schnittpunkt des freien Schenkels des grünen Winkels mit LS.
Das Lot von P auf der Leitgeraden ist Q.
Wegen der Gleichheit von blauem mit dem grünen Winkel $PJ = PF$. Nach Strahlensatz ist $\frac{PJ}{PQ} = \frac{SF}{SC} = \varepsilon$. P liegt also auf dem zu ε gehörigen Kegelschnitt.

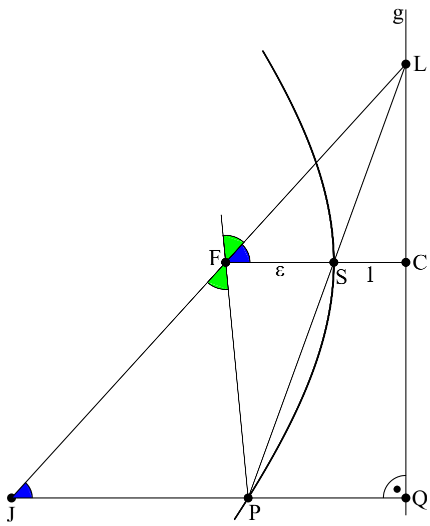


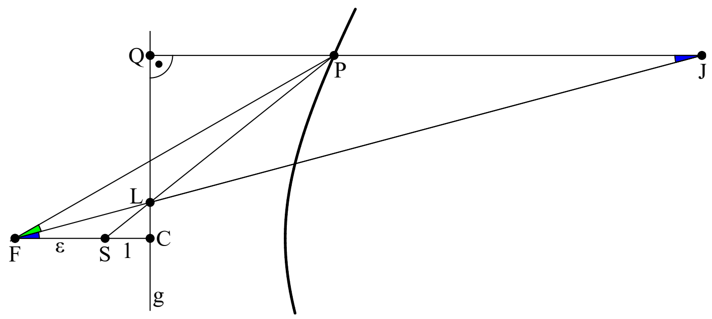
Die entsprechende Konstruktion einer Parabel (links) ist zwar aufwändiger als die herkömmliche, lässt sich jedoch ohne weiteres verallgemeinern.





Den zweiten Hyperbelast bekommt man, wenn L näher an C ist:

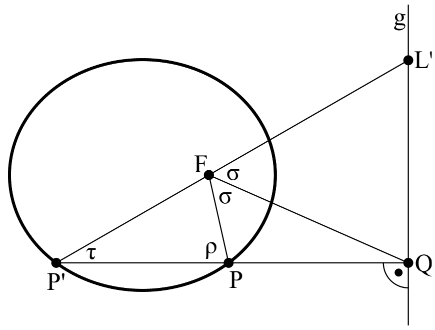




[2] Idee: W.H.Besant ([4]1895): Conic sections treated geometrically. London: George Bell.

5. Konstruktion eines 2. Schnittpunkts

Wenn man bei Ellipse oder Hyperbel zu einem Punkt P und dessen auf der Leitgerade liegenden Lotpunkt Q auch den zweiten Schnittpunkt der Kurve mit PQ haben möchte, bietet sich die folgende einfache Konstruktion[3] an:



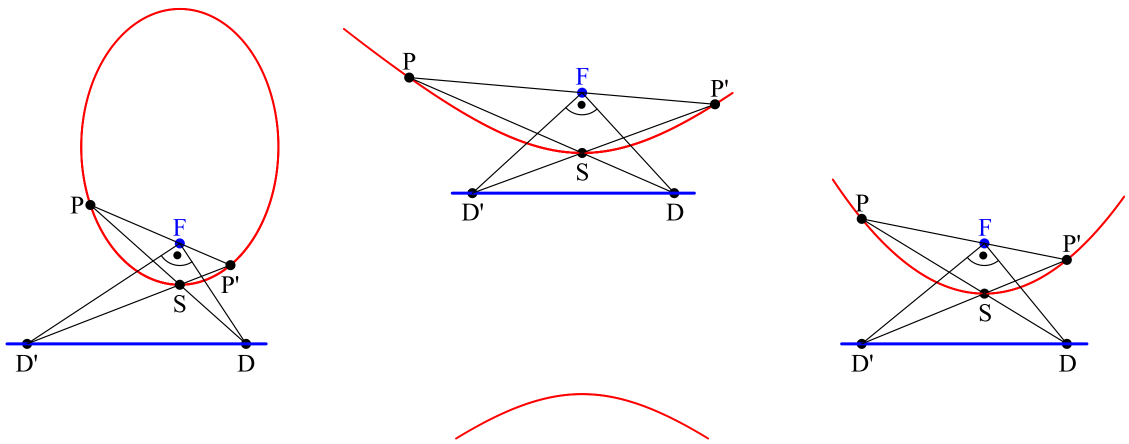
Man verbinde PF und QF. Der untere Winkel σ wird an FQ gespiegelt; der freie Schenkel des gespiegelten Winkels schneidet PQ in P‘ und die Leitgerade in L‘. Dann ist

$$\frac{FP'}{FP}=\frac{\sin\rho}{\sin\tau}=\frac{\dfrac{\sin(180°-\sigma)}{\sin\tau}}{\dfrac{\sin\sigma}{\sin(180°-\rho)}}=\frac{\dfrac{QP'}{QF}}{\dfrac{QP}{QF}}=\frac{QP'}{QP}\text{, und deshalb ist}$$

$$\frac{FP'}{QP'}=\frac{FP}{QP}\text{, so dass P‘ auch auf der Kurve liegt.}$$

6. Sehnen durch den Brennpunkt

F sei der Brennpunkt und D‘D die Leitgerade. Ist P ein Kurvenpunkt, so schneidet die Brennpunkts-Sehne PF die Kurve wieder in P‘.



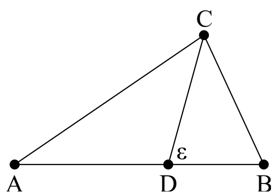
Die Konstruktion von P‘ kann wie folgt vorgenommen[4] werden:

PS schneidet die Leitgerade in D. Die Senkrechte zu DF durch F schneidet die Leitgerade in D‘. Dann ist P‘ der Schnittpunkt von D‘S und PF. (Man hätte statt S auch einen anderen Kurvenpunkt nehmen können.)

Warum ist das so? Zunächst zur Erinnerung:

7. Exkurs zu Winkelhalbierenden

Ist CD Innen-Winkelhalbierende zu γ des Dreiecks ABC, so ist



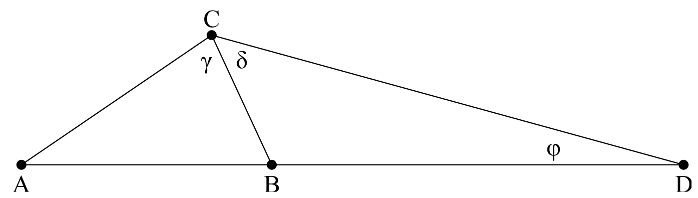
$\dfrac{\sin\frac{\gamma}{2}}{AD}=\dfrac{\sin(180°-\varepsilon)}{b}=\dfrac{\sin\varepsilon}{b}$ im Dreieck ADC und $\dfrac{\sin\frac{\gamma}{2}}{DB}=\dfrac{\sin\varepsilon}{a}$ im Dreieck DBC, zusammen also $\boxed{\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{b}{a}}$.

[3] Idee: Besant, loc. cit.
[4] Idee: Besant, loc. cit.

Ist CD keine Innen-Winkelhalbierende zu γ, so sind die beiden Teilwinkel bei C nicht von gleicher Größe, und damit gilt ***nicht*** die eingekastelte Formel.

Daher kann man sagen: Gilt die eingekastelte Formel, so ist CD Innen-Winkelhalbierende zu γ.

Ist CD Außen-Winkelhalbierende zu γ des Dreiecks ABC,



so ist $\delta = 90° - \frac{\gamma}{2}$ und

$\gamma + \delta = 90° + \frac{\gamma}{2} = 180° - \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right)$,

also $\sin\delta = \sin(\gamma + \delta)$.

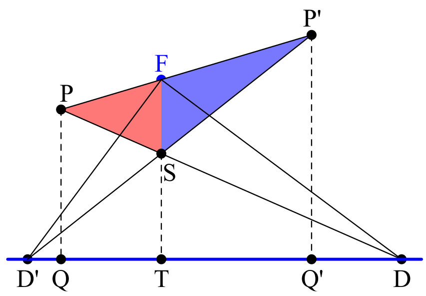
Im Dreieck BDC ist $\frac{\sin\varphi}{a} = \frac{\sin\delta}{BD}$, und im Dreieck ADC ist $\frac{\sin\varphi}{b} = \frac{\sin(\gamma+\delta)}{AD}$, zusammen also $\frac{\sin\delta}{\sin\varphi} = \frac{BD}{a} = \frac{AD}{b}$ bzw. $\boxed{\frac{AD}{BD} = \frac{b}{a}}$. Ist CD keine Außen-Winkelhalbierende zu γ, so gilt ***nicht*** die Beziehung $\sin\delta = \sin(\gamma + \delta)$ und damit auch ***nicht*** die eingekastelte Formel.

Daher kann man sagen: Gilt die eingekastelte Formel, so ist CD Außen-Winkelhalbierende zu γ.

8. Begründung des rechten Winkels bei F

Wenn nun PP‘ eine Brennpunkts-Sehne ist, dann gilt $\frac{PF}{SF} = \frac{PQ}{ST} = \frac{PD}{SD}$, also ist FD Außen-Winkelhalbierende von PSF und damit die Innen-Winkelhalbierende von SP‘F.

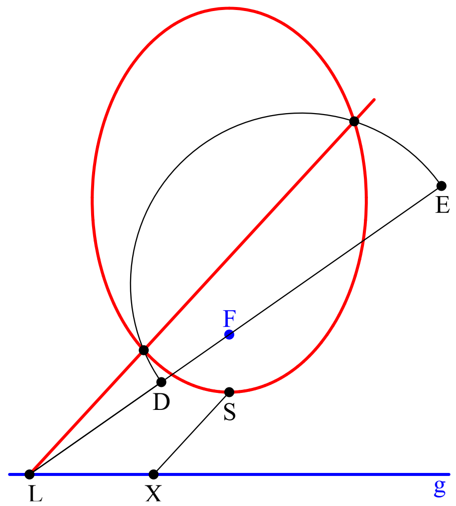
Wegen $\frac{P'F}{SF} = \frac{P'Q'}{ST} = \frac{P'D'}{SD'}$ ist D’F Außen-Winkelhalbierende von SP’F und damit die Innen-Winkelhalbierende von PSF.
Daher steht D‘F auf FD senkrecht.



9. Schnittpunkte von Kegelschnitt und Gerade

Rechnerisch ist zwar der Schnitt von Gerade und Parabel am einfachsten, ist aber keine Konstruktion mit Zirkel und Lineal. Daher wird der Schnitt von Gerade und Ellipse, Hyperbel, Parabel auf den Schnitt einer Geraden mit einem Kreis zurückgeführt.

Diese Schnittpunkte lassen sich wie folgt konstruieren[5]:



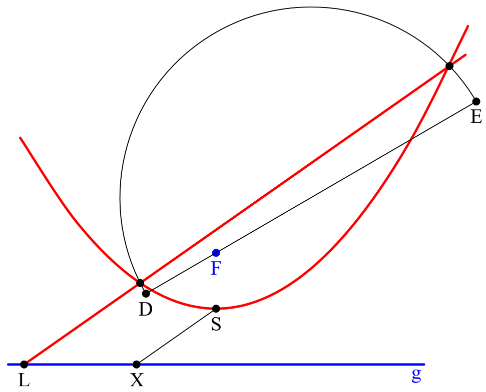
Gegeben seien Brennpunkt F und die blaue fette Leitgerade g sowie eine rote Gerade, die die Leitgerade in L schneidet.

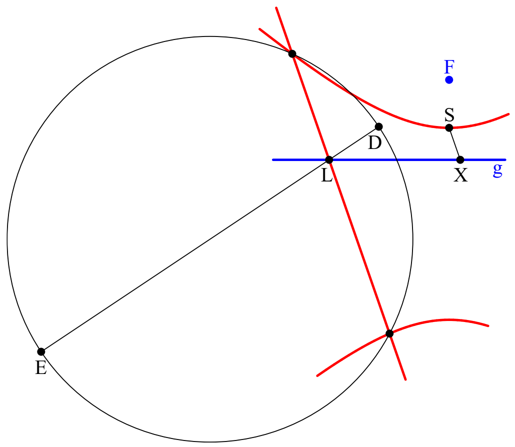
X auf der Leitgeraden g sei so, dass XS zur roten Geraden parallel ist.

Dann sei $D = \frac{|XS| \cdot F + |FS| \cdot L}{|XS| + |FS|}$ und $E = \frac{|XS| \cdot F - |FS| \cdot L}{|XS| - |FS|}$.

Der Kreis über DE schneidet die rote Gerade in zwei Punkten, die gleichzeitig auch die gesuchten Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt sind.

Das Verfahren lässt sich auch bei Parabel und Hyperbel anwenden:





Warum funktioniert das Verfahren? Die Punkte D und E haben die Eigenschaft, dass $\frac{FD}{DL} = \frac{FE}{EL} = \frac{FS}{SX}$ gilt.

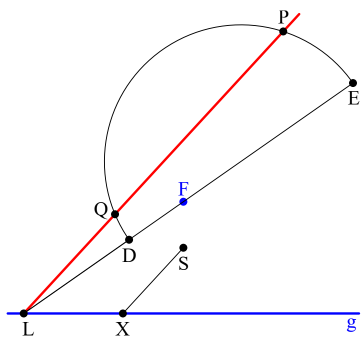
Die Schnittpunkte von Gerade und dem Thaleskreis über DE seien P und Q.

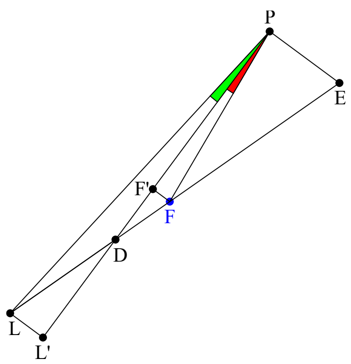
Es ist zu zeigen, dass

$\varepsilon = \frac{FS}{gS} = \frac{FP}{gP}$ bzw. $\frac{FS}{SX} = \frac{FP}{PL}$ ist.

Die Winkel DPE und DP'E sind wegen Thales recht.

Fällt man von F und L die Lote F' und L' auf DP, so sind LL' und FF' daher zu PE parallel.





Nach den Strahlensätzen und aufgrund der Definition von D und E ist $\frac{FF'}{LL'} = \frac{FD}{DL} = \frac{FE}{EL} = \frac{PF'}{PL'}$.

Der Tangens des grünen Winkels ist $\frac{LL'}{PL'}$, der Tangens des roten Winkels ist $\frac{FF'}{PF'}$. Nach der letzten Gleichung stimmen die beiden Tangens-Werte überein, der rote Winkel hat die gleiche Größe wie der

[5] Idee: Besant, op. cit.

grüne. Da DF Innen-Winkelhalbierende im Dreieck LFP ist, muss $\frac{PF}{LP} = \frac{DF}{LD}$ gelten, und dies ist nach Definition von D so groß wie $\frac{FS}{SX}$. Damit gilt $\frac{PF}{LP} = \frac{FS}{SX}$, und P liegt auf dem Kegelschnitt.

Analog geht man bei Q vor.