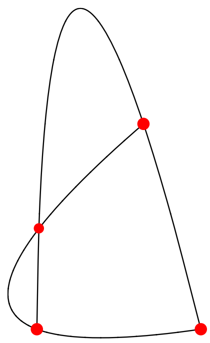
Jörg MEYER, Hameln 16. 1. 2024

Gegeben : 5 Punkte einer Parabel. Wie findet man den Brennpunkt und die Leitgerade?

Inhalt

Eine Parabel ist durch 5 (nicht kollineare) Punkte festgelegt.
Die nebenstehende Skizze zeigt, dass man tatsächlich 5 Punkte benötigt, denn durch die 4 roten Punkte rechts ist die Parabel nicht eindeutig bestimmt.



Um weitere Punkte, deren Tangenten sowie Achse und Brennpunkt zu konstruieren, ist ein Satz des damals etwa 16-jährigen Blaise PASCAL hilfreich. Im 1. Kapitel wird der Satz von PASCAL angegeben und erläutert, dass er für ganz unterschiedliche Zwecke er fruchtbar gemacht werden kann.
Zu den Vorkenntnissen gehört auch ein Einblick in die Theorie der konjugierten Durchmesser (2. Kapitel).

Kap. 1: Der Satz von PASCAL

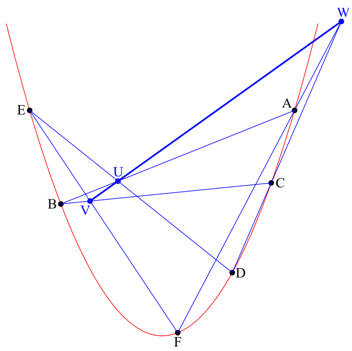
Liegen A, B, …, F auf einer r Parabel, so sind

$$U = AB \cap DE$$

$$V = BC \cap EF$$

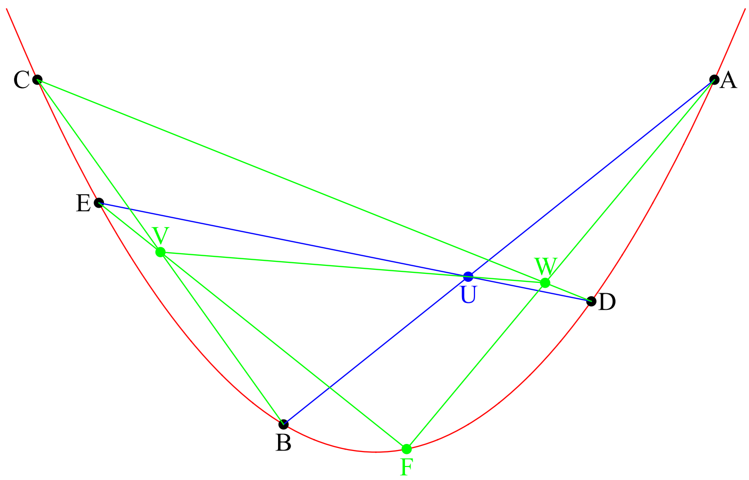
$$W = CD \cap FA$$

kollinear.



Sind umgekehrt U, V, W kollinear, so liegen die 6 Punkte auf einem Kegelschnitt (Satz von William BRAIKENRIDGEund Colin MACLAURIN).

Damit kann man zu fünf Punkten A, B, …, E einen sechsten Punkt F konstruieren, der etwa zu A eine vorgegebene Steigung hat, so dass man *zueinander parallele Sehnen* bekommen kann:

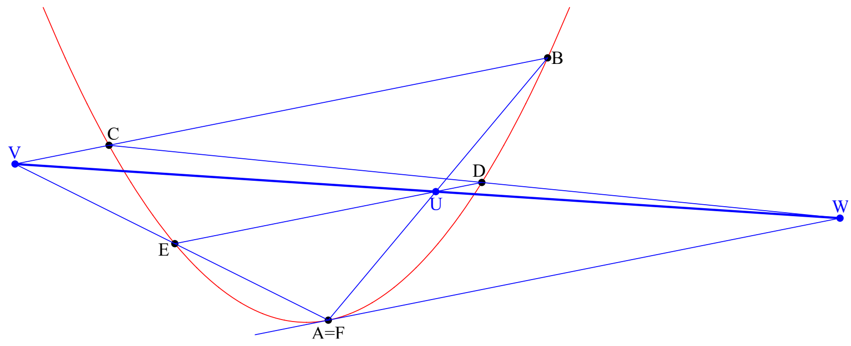


Es ist $U = AB \cap DE$. Man beginnt mit der (grünen) Gerade g durch A mit vorgegebener Steigung m, dann sei $W = g \cap CD$ und $V = BC \cap UW$ und schließlich $F = EV \cap AW$. Damit hat AF die vorgegebene Steigung m.

Variiert man die Steigung m, bekommt man, ausgehend von den 5 Punkten A, B, …, E, alle anderen Parabelpunkte. Daher ist eine Parabel durch 5 Punkte bestimmt.

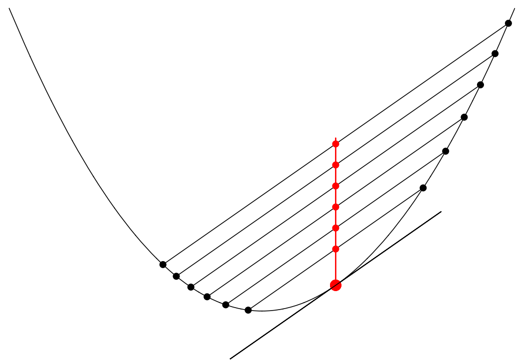
Der Satz von PASCAL liefert auch die *Tangenten* in den vorgegebenen (und damit in allen) Punkten:

Will man die Tangente etwa im Punkt A haben, identifiziere man A mit F. Mit $U = AB \cap DE$ und $V = BC \cap EF = BC \cap EA$ ist dann nicht nur $W = CD \cap FA = CD \cap AA$, sondern auch $W = CD \cap UV$, und daher ist WA die Tangente in A.



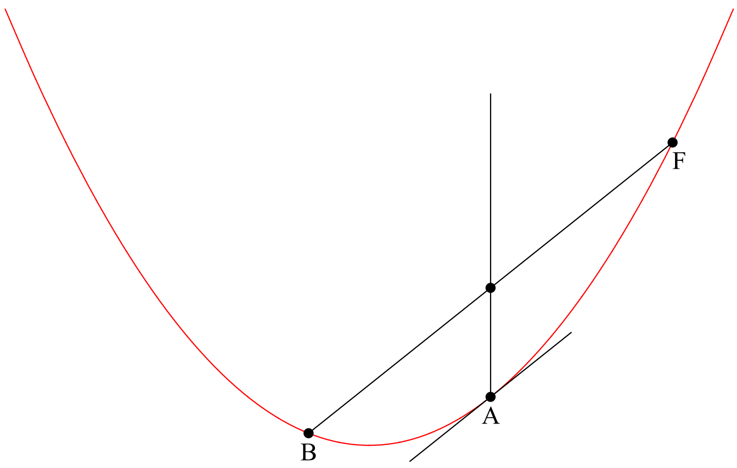
Kap. 2: Konjugierte Durchmesser

Bei der Parabel ist die Mittelpunktsgerade zur Achse parallel. Sie geht durch den Berührpunkt der zu den Sehnen parallelen Tangente.



Kap. 2.a: Konstruktion von Parallelen zur Parabelachse

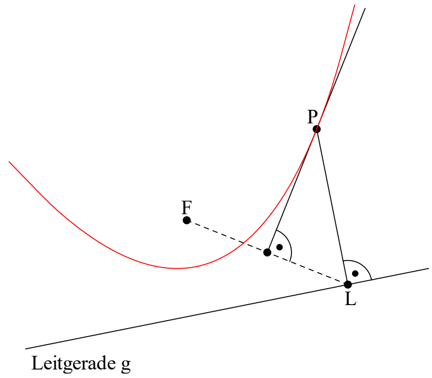
Man konstruiere mit Hilfe des Satzes von PASCAL die Tangente in A und konstruiere mit Hilfe desselben Satzes den Parabelpunkt F so,, dass BF zur Tangente in A parallel ist. Dann ist die Verbindungsgerade zwischen A und dem Mittelpunkt von BF zur Parabelachse parallel. (Man beachte, dass man zur Ermittlung der Achsrichtung alle 5 Parabelpunkte A, B, …, E benötigt.)



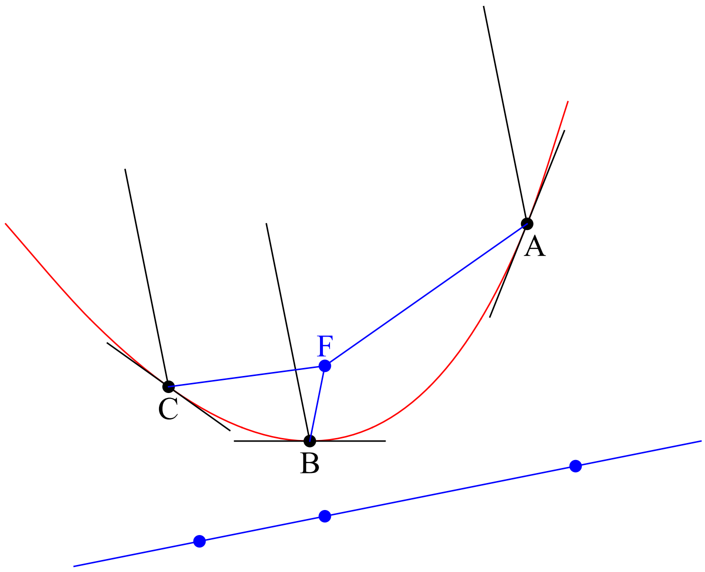
Kap. 3: Konstruktion von Brennpunkt und Leitgerade

Es seien 5 Parabelpunkte gegeben.

Für die weitere Vorgehensweise ist es sinnvoll, sich die Konstruktion eines allgemeinen Parabelpunkts P anzusehen: LP ist parallel zur Achse. Die Mittelsenkrechte zu F und L ist Tangente in P.
Spiegelt man LP an der Tangente, geht deren Spiegelbild durch F.
Spiegelt man F an der Tangente, erhält man einen Punkt auf der Leitgeraden.



Damit ist die Konstruktion klar:
Man ermittle die Achsrichtung, trage sie in A und B ab und konstruiere zu A und B die Tangenten (rechts wurde das auch mit C gemacht).
Die (blauen) Spiegelbilder der zur Achse parallelen Geraden durch A und B an den jeweiligen Tangenten treffen sich im Brennpunkt F. Die Spiegelbilder von F an den Tangenten liegen auf der Leitgeraden.



Anhang: Wie erkennt man den Typ des Kegelschnitts?

Das geschilderte Verfahren zur Bestimmung von Brennpunkt und Leitgerade setzte voraus, dass man wusste, dass es sich um eine Parabel handelt. Aber woher weiß man das?

Schreibt man $P=\dfrac{x\cdot A+y\cdot B+z\cdot C}{x+y+z}=(x:y:z)$ in baryzentrischen Punkt-Koordinaten, so liegt P genau dann auf einem Kegelschnitt durch A, B, C, wenn $\boxed{r\cdot y\cdot z+s\cdot z\cdot x+t\cdot x\cdot y=0}$ für passende r, s, t gilt.

Nun sei $P^{\#}=\left(x^{\#}:y^{\#}:z^{\#}\right)=\left(\dfrac{a^2}{x}:\dfrac{b^2}{y}:\dfrac{c^2}{z}\right)$ Bild von $P=(x:y:z)$ bei der isogonalen Konjugation. Man beachte, dass die isogonale Konjugation involutorisch ist, d.h. $\left(P^{\#}\right)^{\#}=P$.

Nun gilt die folgende Äquivalenzkette:

$$r\cdot y\cdot z+s\cdot z\cdot x+t\cdot x\cdot y=0$$
$$r\cdot\frac{b^2}{y^{\#}}\cdot\frac{c^2}{z^{\#}}+s\cdot\frac{c^2}{z^{\#}}\cdot\frac{a^2}{x^{\#}}+t\cdot\frac{a^2}{x^{\#}}\cdot\frac{b^2}{y^{\#}}=0$$
$$r\cdot\frac{x^{\#}}{a^2}+s\cdot\frac{y^{\#}}{b^2}+t\cdot\frac{z^{\#}}{c^2}=0$$

$P^\# = \left(x^\# : y^\# : z^\#\right)$ liegt also auf der Geraden $\left[\frac{r}{a^2}:\frac{s}{b^2}:\frac{t}{c^3}\right]$ (in baryzentrischen Linien-Koordinaten).

Die isogonale Konjugation bildet daher Kegelschnitte durch A, B, C auf Geraden ab.

Der Umkreis von A, B, C hat die Gleichung $a^2 \cdot y \cdot z + b^2 \cdot z \cdot x + c^2 \cdot x \cdot y$; er wird bei der isogonalen Konjugation auf die Ferngerade $[1:1:1]$ abgebildet.

Nun mögen die 5 Punkte A, B, …, E auf einem Kegelschnitt liegen. Dann kann man D und E in baryzentrischen Koordinaten bzgl. A, B und C ausdrücken und die isogonalen Konjugate $D^\#$ und $E^\#$ bestimmen. $D^\#$ und $E^\#$ legen die Gerade g fest, auf die der Kegelschnitt bei der isogonalen Konjugation abgebildet wird.

Falls g den Umkreis von A, B, C schneidet, so gilt für jeden der beiden Schnittpunkte S, dass $S^\#$ auf der Ferngeraden liegt (da S auf dem Umkreis liegt) und dass $S^\#$ auf dem Kegelschnitt liegt (da S auf g liegt und weil die isogonale Konjugation involutorisch ist). In diesem Fall schneidet der Kegelschnitt also die Ferngerade, so dass es sich um eine Hyperbel handelt. Stimmen beide Schnittpunkte überein, handelt es sich um eine Parabel. Falls g den Umkreis berührt, liegt eine Parabel vor.

Anhang: Beispiel

In den folgenden Skizzen seien die roten Punkte A, B, …, E gegeben.

Da $D^\# E^\#$ den Umkreis von ABC berührt, liegt eine Parabel vor. Rechts werden die (roten) Parallelen zur Achse konstruiert und damit F und die Leitgerade.